



القواعد الجلية في الأعمال الجبرية

شامل برنامجى الجبر للمعاهد الدينية والمدارس الثانوية

تأليف

محمد افندى ادريس

مدرس رياضة بمدرسة المعلمين الناصرية

الجزء الثانى

خاص بباقى برنامج المدارس الثانوية

(الطبعة الثانية)

بعد تنقيحها واضافة زيادات نافعة بها

بالمطبعة الأميرية بمصر

١٣٢٩ هـ – ١٩١١ م

بسم الله الرحمن الرحيم

المربع والجذر التربيعى

١٥١ تعريف ـ مربع اىّ كمية هو حاصل [illegible]
مساويين لها

مثلا مربع ح هو $\text{ح} \times \text{ح} = \text{ح}^{٢}$

ومربع − ح هو $-\text{ح} \times -\text{ح} = \text{ح}^{٢}$

١٥٢ قاعدة ـ مربع حاصل ضرب عدة عوامل [illegible]
حاصل ضرب مربعاتها

مثلا $(\text{ح د هـ})^{٢} = \text{ح}^{٢}\,\text{د}^{٢}\,\text{هـ}^{٢}$ لان $(\text{ح د هـ})^{٢} = \text{ح د هـ} \times \text{ح د هـ} = \text{ح ح د د هـ هـ} = \text{ح}^{٢}\,\text{د}^{٢}\,\text{هـ}^{٢}$

١٥٣ نتيجة ـ لتربيع حد يربع مكرره وتضاعف أسس حروفه
فمربع $٣\,\text{ب}^{٢}\,\text{ح}^{٣} = ٩\,\text{ب}^{٤}\,\text{ح}^{٦}$ ومربع $\frac{١}{٥}\,\text{ح}^{٢}\,\text{د هـ}$ هو $\frac{١}{٢٥}\,\text{ح}^{٤}\,\text{د}^{٢}$ [illegible]

تنبيه ـ تقدم بنمرة ٤٣ قانون مربع كمية ذات حد[illegible]
وبنمرة ٥١ قانون مربع كمية كثيرة الحدود

١٥٤ تعريف ـ قوة أى كمية بدرجة ماهى حاصل ضرب
عوامل مساوية لها عددها بقدر درجة القوة

أعنى $ح^{م} = ح × ح × ح × ح \dots$ بقدر م

وبالقياس على ماسبق يكون $(ح\,ء\,هـ)^{م} = ح^{م}\,ء^{م}\,هـ^{م}$ و

$(٣\,ح^{٣}\,ء^{٢}\,هـ)^{٥} = ٢٤٣\,ح^{١٥}\,ء^{١٠}\,هـ^{٥}$

ومن هنا يؤخذ انه لرفع حد الى درجةما يرفع مكرره الى هـذه الدرجة وتضرب أسس حروفه فيها

تنبيه ــ تقدّم (بنمرة ٣٥) بيان علامات قوى الحدود الموجبة والسالبة

١٥٥ تعـريف ــ الجذر التربيعى لكمية هو كميـة اذا رفعت الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

مثلا $\sqrt{ح^{٢}} = ح$, $\sqrt{٦٤\,هـ^{٤}} = ٨\,هـ^{٢}$

و $\sqrt{\frac{١}{٤}\,ح^{٢}\,ء^{٢}} = \frac{١}{٢}\,ح\,ء$

لانه اذا رفع كل منها الى القوة الثانية تنتج الكمية المفروضة

١٥٦ قاعدة ــ الجذر التربيعى لحاصـل ضرب عدة عوامل يساوى حاصل ضرب الجذور التربيعية لها

مثلا $\sqrt{ح\,ء\,هـ} = \sqrt{ح}\,\sqrt{ء}\,\sqrt{هـ}$ لأن $(\sqrt{ح}\,\sqrt{ء}\,\sqrt{هـ})^{٢}$

$= (\sqrt{ح})^{٢} × (\sqrt{ء})^{٢} × (\sqrt{هـ})^{٢} = ح\,ء\,هـ$

١٥٧ نتيجة ــ لايجاد الجذر التربيعى لحد يؤخذ الجذر التربيعى لمكرره وتنصف أسس حروفه

مثلا $\sqrt{٦٤\,ح^{٤}\,ء^{٦}} = ٨\,ح^{٢}\,ء^{٣}$, $\sqrt{\frac{١}{١٦}\,ح^{٤}\,ء^{٢}} = \frac{١}{٤}\,ح^{٢}\,ء$

١٥٨ تنبيه ـ الحد يكون مربعا كاملا متى كان مكرره مربعا كاملا واسس حروفه زوجيـة وفى هذه الحالة يمكن أخذ جذره

أما اذا لم يكن مربعا كاملا فيبين جذره بوضعه تحت علامة الجذر ويسمى مقدارا غير جذرى أو جذرا أصم .

١٥٩ اذا لم تكن الاسس زوجية فلا يكون الحد مربعا كاملا ولذا لايمكن أخذ جذره التربيعى ولكن اذا طبقنا قاعدة (١٥٧) يكون أسس بعض الحروف أو كلها كسرية ويمكن اعتبار الناتج هو الجذر المطلوب

مثلا $\sqrt{\text{ح}} = \text{ح}^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\text{ح}^{3}} = \text{ح}^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\text{٤٩}\,\text{ح}^{3}\,\text{ى}} = \text{٧}\,\text{ح}^{\frac{3}{2}}\,\text{ى}^{\frac{1}{2}}$

و $\sqrt{\text{ح}^{5}\,\text{ى}^{2}\,\text{ه}} = \text{ح}^{\frac{5}{2}}\,\text{ى}\,\text{ه}^{\frac{1}{2}}$ لانه اذا رفعت الكميات $\text{ح}^{\frac{1}{2}}$ و $\text{ح}^{\frac{3}{2}}$ و $\text{٧}\,\text{ح}^{\frac{3}{2}}\,\text{ى}^{\frac{1}{2}}$ و $\text{ح}^{\frac{5}{2}}\,\text{ى}\,\text{ه}^{\frac{1}{2}}$ الى الدرجة الثانيـة بموجب قاعدة (١٥٣) نتج على التوالى الكميات المفروضة

١٦٠ تعريف ـ الجذر الميمى لكمية هو كمية اذا رفعت الى القوة الميمية تنتج الكميـة الاولى

فاذا كان $\text{ح}^{\text{م}} = \text{ى}$ يكون $\sqrt[\text{م}]{\text{ى}} = \text{ح}$

وبالقياس على ماسبق يكون $\sqrt[\text{م}]{\text{ح ى ه}} = \sqrt[\text{م}]{\text{ح}}\,\sqrt[\text{م}]{\text{ى}}\,\sqrt[\text{م}]{\text{ه}}$

و $\sqrt[\text{٣}]{\text{١٢٥}\,\text{ح}^{3}\,\text{ى}^{6}\,\text{ه}^{9}} = \text{٥}\,\text{ح}\,\text{ى}^{2}\,\text{ه}^{3}$

ومن هنا يؤخذ انه لايجـاد جذر حد بدرجة ما يؤخذ جذر مكرره بهذه الدرجة وتقسم أسس حروفه عليها

١٦١ اذا لم تقبل الاسس القسمة على دليل الجذر فتوضع على هيئة كسور

مثلا $\sqrt[٣]{ح} = ح^{\frac{١}{٣}}$, $\sqrt[٥]{ء^٣} = ء^{\frac{٣}{٥}}$, $\sqrt[٦]{ح^٤ ء^٣} = ح^{\frac{٢}{٣}} ء^{\frac{١}{٢}}$

لانه اذا رفعت الكمية $ح^{\frac{١}{٣}}$ للدرجة الثالثة , $ء^{\frac{٣}{٥}}$ للدرجة الخامسة , $ح^{\frac{٢}{٣}} ء^{\frac{١}{٢}}$ للدرجة السادسة نجت الكميات الاصلية

١٦٢ يؤخذ مما تقدم أن الحرف ذا الأس الكسرى هو عبارة عن جذر دليله المقام لهذا الحرف باس يساوى البسط

١٦٣ مقادير الجذور التربيعية ـ لكل كمية موجبة جذران تربيعيان متساويان فى المقدار المطلق ومختلفان فى العلامة

مثلا $\sqrt{٢٥} = +٥$, $\sqrt{٢٥} = -٥$

لان $+٥ \times +٥ = ٢٥$, $-٥ \times -٥ = ٢٥$

ويكتب $\sqrt{٢٥} = \pm ٥$ ويقرا زائدا أو ناقصا خمسة

وعموما $\sqrt{ح^٢} = \pm ح$

١٦٤ تنبيه ـ حيث ان القوى الفردية للحدود الموجبة تكون موجبة وللحدود السالبة تكون سالبة فيؤخذ من ذلك أن علامة الجذر التكعيبى لحد هى عين علامة ذلك الحد أعنى $\sqrt[٣]{ح^٦} = ح^٢$,

$\sqrt[٣]{-ح^٦} = -ح^٢$

١٦٥ قاعدة ـ لايجـاد الجذر التربيعى لكميــة كثيرة الحدود ترتب هذه الكمية بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيها ويؤخذ الجذر التربيعى لاول حد منها فينتج أول حد من الجذر يطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم يقسم أول حد من الباقى على ضـعف الجذر فينتج الحد الثانى من الجذر ثم يضــعف أول حد من الجذر ويضاف اليــه الحد الثانى ويضرب المجموع فى الحد الثـانى ويطرح الحاصل من الباقى الاول ثم يقسم أول حد من الباقى الثانى على ضعف أول حد من الجذر فينتج ثالث حد من الجـذر ثم يضـعف الحدّان الاولان ويضاف لهما الحـد الثالث ويضرب المجموع فى الحد الثالث ويطرح الحاصـل من البـاقى الثانى ويسـتمر فى العمل هكذا حتى تنتهى العملية

مثلا لايجاد الجذر التربيعى لكميــة $٩ ح^{٤} + ٤٦ ح^{٢} د^{٢} + ٢٥ د^{٤}$ $— ٢٤ ح^{٣} د — ٤٠ ح د^{٣}$ نرتبها بالنسبة للدرجات التنازلية لحرف ح ونجرى العمل هكذا

$٩ ح^{٤} — ٢٤ ح^{٣} د + ٤٦ ح^{٢} د^{٢} — ٤٠ ح د^{٣} + ٢٥ د^{٤}$	$٣ ح^{٢} — ٤ ح د + ٥ د^{٢}$
$٩ ح^{٤}$	
	$٦ ح^{٢} — ٤ ح د$
$— ٢٤ ح^{٣} د + ٤٦ ح^{٢} د^{٢} — ٤٠ ح د^{٣} + ٢٥ د^{٤}$	$— ٤ ح د$
$— ٢٤ ح^{٣} د + ١٦ ح^{٢} د^{٢}$	
$٣٠ ح^{٢} د^{٢} — ٤٠ ح د^{٣} + ٢٥ د^{٤}$	$٦ ح^{٢} — ٨ ح د + ٥ د^{٢}$
$٣٠ ح^{٢} د^{٢} — ٤٠ ح د^{٣} + ٢٥ د^{٤}$	$٥ د^{٢}$

وكيفية العمل أن نستخرج جذر الحد الاول $٩ ح^{٤}$ فينتج $٣ ح^{٢}$ مربع هذا الحد ونطرح مربعه من الكمية المفروضة ثم تقسم الحدالاول من الباقى وهو $- ٢٤ ح^{٣} ء$ على ضعف الجذر أى على $٦ ح^{٢}$ فينتج $- ٤ ح ء$ وهو ثانى حد من الجذر ثم نضعف الحد الاول ونضيف الى هذا الضعف الحد الثانى فينتج $٦ ح^{٢} - ٤ ح ء$ يضرب فى الحد الثانى وهو $- ٤ ح ء$ فينتج $- ٢٤ ح^{٣} ء + ١٦ ح^{٢} ء^{٢}$ ويطرح هذا الحاصل من الباقى الاول ثم يقسم أول حد من الباقى الثانى وهو $٣٠ ح^{٢} ء^{٢}$ على ضعف الحد الاول من الجذر وهو $٦ ح^{٢}$ فينتج $٥ ء^{٢}$ وهو ثالث حد من الجذر ثم نضاعف الحدين الاولين ونضيف لهما الحد الثالث فينتج $٦ ح^{٢} - ٨ ح ء + ٥ ء^{٢}$ نضربه فى الحد الثالث $٥ ء^{٢}$ ينتج $٣٠ ح^{٢} ء^{٢} - ٤٠ ح ء^{٣} + ٢٥ ء^{٤}$ فنطرح هذا الحاصل من الباقى الثانى فلا يبقى شئ

١٦٦ تنبيه ـ لايمكن ايجاد الجذر التربيعى لكمية الا اذا كانت مربعا كاملا

ويعلم أن الكمية غير مربع كامل بعد ترتيبها بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف فيها اذا كان الحد الاول غير مربع كامل أو كان الحد الثانى لايقبل القسمة على ضعف جذر الحد الاول وكذلك اذا كان الحدّ الاخير غير مربع كامل أو كان الحدّ الذى قبله مباشرة لايقبل القسمة على ضعف جذره أو كان الحدّ الاول من أى باق لايقبل القسمة على ضعف الحدّ الاول من الجذر

١٦٧ تنبيه ـ الكمية ذات الحدّين لاتكون مربعا كاملا مطلقا لأن مربع الحدّ هو حدّ ومربع ذات الحدّين يشتمل على ثلاثة حدود ومربع كثيرة الحدود هو كمية كثيرة الحدود

تمـــرين ٤١

ما مربع كل من الكميات

(١) ح و − ى و هـ^{٢}

(٢) ٣ ح ى و ٢ ح هـ^{٢}

(٣) − ٢ ح هـ^{٢}

(٤) ٤ هـ و^{٢} ل^{٣}

(٥) $\frac{ح}{ى}$ و − $\frac{هـ}{و}$

(٦) $\frac{هـ^{٢}}{ل}$ و − $\frac{م}{ن}$

(٧) ٢ أ ب^{٢} ح ى

(٨) ٣ ى هـ^{٢} و^{٣} م

أوجد مقادير الكميات الآتية

(٩) (٣ ح^{٢} ى)^{٣}

(١٠) (٣ ب ح ى^{٢})^{٤}

(١١) (− ٢ ح ى^{٢})^{٥}

(١٢) (− ٢ ح ى^{٢})^{٦}

(١٣) $\left(\frac{٧ ح}{و}\right)^{٣}$

(١٤) $\left(\frac{-٣ ب}{٢ ح ى}\right)^{٤}$

(١٥) $\left(\frac{٣ ح ى}{-٢ أ ب}\right)^{٥}$

(١٦) (أ ب ح ى)^{٦}

أوجد مقادير الجذور التربيعية للحدود الآتية

(١٧) ٢٥ ح^{٤} ى^{٢}

(١٨) ٨١ س^{٢} ص^{٢}

(١٩) $\frac{١}{٢٢٥}$ ح^{٢} ى^{٢} هـ^{٨}

(٢٠) $\frac{١}{٥٧٦}$ س^{٨} ص^{٤}

(٢١) ٤٩ ح^{٣} ى^{٢}

(٢٢) ١٦ ب^{٣} ح^{٥}

(٢٣) ٢٥ ب^{٥} ى^{٣}

(٢٤) ١٢١ ب^{٣} ح ى

ابحث عن مقادير الكميات الآتية

(٢٥) $\sqrt[٣]{ح^{٦} ء^{٣}}$ | (٢٨) $\sqrt[٧]{ر^{٥} ء}$

(٢٦) $\sqrt[٥]{ح^{٥} ء^{١٠}}$ | (٢٩) $\sqrt[٦]{ت^{٥} ء}$

(٢٧) $\sqrt[٤]{ح^{٤} ء^{٤}}$ | (٣٠) $\sqrt[٤]{ح ء}$

المطلوب ايجاد الجذور التربيعية للكميات الآتية

(٣١) $س^{٢} - ٢ س + ١$

(٣٢) $س^{٢} + ٤ س + ٤$

(٣٣) $س^{٤} - \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{١٦}$

(٣٤) $٤ ح^{٤} - ١٢ ح^{٣} ء + ٢٥ ح^{٢} ء^{٢} - ٢٤ ح ء^{٣} + ١٦ ء^{٤}$

(٣٥) $٩ س^{٤} + ١٢ س^{٣} ص - ٢ س^{٢} ص^{٢} - ٤ س ص^{٣} + ص^{٤}$

(٣٦) $\frac{١}{٤} ح^{٤} + \frac{١}{٣} ح^{٣} + \frac{١٣}{٣٦} ح^{٢} + \frac{١}{٦} ح + \frac{١}{١٦}$

(٣٧) $س^{٤} + ٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٢ س + ١$

(٣٨) $١٦ س^{٦} - ٢٤ س^{٥} + ٢٥ س^{٤} - ٢٠ س^{٣} + ١٠ س^{٢}$
$- ٤ س + ١$

(٣٩) $٢٥ ح^{٤} + ٤٩ ث^{٢} ح^{٢} + ١٦ ث^{٤} - ٣٠ ب ح^{٣} - ٢٤ ث^{٣} ح$

(٤٠) $١٦ ا ح ء^{٥} + ٤ ث^{٢} ء^{٤} + ا^{٢} ء^{١٠} + ٩ ح^{٢} - ١٢ ب ح ء^{٢}$
$- ٤ ا ب ء^{٧}$

الاسس

١٦٨ تمهيد ـ تقـدم (بنمرة ٤) ان درجة قوة كمية تبين بعدد مضاريبها وان هذا العدد يوضع فوق الكمية ويسمى اسا

أي ان $\text{ح}^{٤} = \text{ح ح ح ح}$ وان $\text{ح}^{\text{م}} = \text{ح ح ح} \ldots$ مرات بقـــدر م

وتقدم (بنمرة ٦٠) ان الحرف ذا الاس الصفر يساوى واحدا

أى ان $\text{ح}^{٠} = ١$

وتقـدم (بنمـرة ٦٢) ان الحرف ذا الاس السالب يساوى كسرا بسطه واحدا ومقامه هذا الحرف باسه موجبا

أى ان $\text{ح}^{-٣} = \frac{١}{\text{ح}^{٣}}$, $\text{ح}^{-\text{ن}} = \frac{١}{\text{ح}^{\text{ن}}}$

وتقـدم (بنمرة ١٦٢) ان الحرف ذا الاس الكسرى عبارة عن جذر دليلة المقام لهذا الحرف باس يساوى البسط

أعني ان $\text{ح}^{\frac{٣}{٥}} = \sqrt[٥]{\text{ح}^{٣}}$, $\text{ح}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{\text{م}}}$

١٦٩ يؤخذ مما ذكر ان الاس يكون موجبا أو سالبا صحيحا أو كسريا أو معدوما (صفر) ومن حيث ان القواعد الاساسية التى يحتاج فيها الى اجراء عمليات على الاسس هى ضرب وقسـمة الحدود ورفعها الى قوة واستخراج جذورها وقد تقدم الكلام على كل منها فى محله بايضاح تام فى حالة ما اذا كانت الاسس صحيحة وموجبه فالذى نريد بيانه الآن هو ان تلك القواعد عامة وتنطبق تمام الانطباق على الاسس السالبة والكسرية والعدمية ولتوضيح ذلك نقول

١٧٠ الضرب $ح^{م} \times ح^{ن} = ح^{م+ن}$ مهما كان م , ن

أولا ـ اذا كان م = − ب , ن = − و فيكون

$$ح^{-ب} \times ح^{-و} = ح^{-ب-و}$$

لان $ح^{-ب} = \frac{1}{ح^{ب}}$, $ح^{-و} = \frac{1}{ح^{و}}$ فيكون

$$ح^{-ب} \times ح^{-و} = \frac{1}{ح^{ب}} \times \frac{1}{ح^{و}} = \frac{1}{ح^{ب+و}} = ح^{-ب-و}$$

تطبيق $ح^{-2} \times ح^{-3} = ح^{-5}$

ثانيا ـ اذا كان م $= \frac{ب}{و}$, ن $= \frac{ف}{و}$ يكون

$$ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ف}{و}} = ح^{\frac{ب+ف}{و}}$$

وذلك لان $ح^{\frac{ب}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب}}$, $ح^{\frac{ف}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ف}}$

فيكون $ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ف}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب}} \times \sqrt[و]{ح^{ف}}$ نرفع الطرفين لدرجة و

$$\left(ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ف}{و}}\right)^{و} = ح^{ب} ح^{ف}$$ أو

$$\left(ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ف}{و}}\right)^{و} = ح^{ب+ف}$$ نأخذ جذر الطرفين بدرجة و

$$ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ف}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب+ف}}$$ أو

$$ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ف}{و}} = ح^{\frac{ب+ف}{و}}$$

واذا اختلف المقامان يجنس الكسران ابتداء (عند البرهان)

تطبيق $\text{ح}^{\frac{٣}{٢}} \times \text{ح}^{\frac{١}{٢}} = \text{ح}^{٢}$, $\text{ح}^{\frac{٣}{٥}} \times \text{ح}^{\frac{١}{٤}} = \text{ح}^{\frac{١٧}{٢٠}}$

ثالثا ـ اذا كان م = ٠ , ن = ـ ب فيكون

$$\text{ح}^{٠} \times \text{ح}^{-\text{ب}} = \text{ح}^{-\text{ب}}$$

وذلك لان $\text{ح}^{٠} = ١$ فيكون

$$\text{ح}^{٠} \times \text{ح}^{-\text{ب}} = ١ \times \text{ح}^{-\text{ب}} = \text{ح}^{-\text{ب}}$$

وقس على هـــذا اذا كانت أحدى الكميتين ذات اس موجب او سالب أو كسرى والاخرى مخالفة لها فى الاس

تمـــرين ٤٢

المطلوب اجراء عمليات الضرب الآتية

(١) $\text{ب}^{-٣} \times \text{ب}^{-٥}$

(٢) $\text{ح}^{-٣} \times \text{ح}^{٤}$

(٣) $\text{ى} \times \text{ى}^{-٥}$

(٤) $\text{ب}^{٠} \times \text{ب}^{-٣}$

(٥) $\text{ح}\,\text{ى}^{-٢} \times \text{ح}^{-٢}\,\text{ى}^{٢}$

(٦) $\text{ب}^{\frac{٣}{٥}} \times \text{ب}^{\frac{٢}{٥}}$

(٧) $\text{ح}^{\frac{٣}{٤}} \times \text{ح}^{\frac{١}{٣}}$

(٨) $\text{ى}^{\frac{٢}{٥}} \times \text{ى}^{\frac{١}{٦}}$

(٩) $\text{ب}^{\frac{٣}{٥}} \times \text{ب}^{-\frac{٢}{٥}}$

(١٠) $\text{ح}^{-\frac{٣}{٤}} \times \text{ح}^{\frac{١}{٣}}$

(١١) $٢\,\text{ى}^{-٢} \times ٦\,\text{ى}^{-٣}$

(١٢) $٣\,\text{هـ}^{٣} \times ٥\,\text{هـ}^{-٢}$

(١٣) $٤\,\text{و}^{\frac{١}{٢}} \times ٤\,\text{و}^{-\frac{١}{٢}}$

(١٤) $٥\,\text{ى}^{\frac{١}{٣}} \times ٣\,\text{ى}^{-\frac{٢}{٣}}$

(١٥) $٦\,\text{هـ}^{-\frac{١}{٧}} \times \text{هـ}^{-\frac{٢}{٧}}$

١٧١ القسـمة $ح^{م} : ح^{ن} = ح^{م-ن}$ مهما كان م , ن

أولا ـ اذا كان م = − ب , ن = − و فيكون

$$ح^{-ب} : ح^{-و} = ح^{و-ب}$$

وذلك لأن $ح^{-ب} = \frac{1}{ح^{ب}}$, $ح^{-و} = \frac{1}{ح^{و}}$ فيكون

$ح^{-ب} : ح^{-و} = \frac{1}{ح^{ب}} : \frac{1}{ح^{و}} = ح^{و-ب}$ وهو المراد

تطبيق $ح^{-٥} : ح^{-٣} = ح^{-٢}$, $ح^{-٣} : ح^{-٥} = ح^{٢}$

ثانيا ـ اذا كان م $= \frac{ب}{و}$, ن $= \frac{ف}{و}$ فيكون

$$ح^{\frac{ب}{و}} : ح^{\frac{ف}{و}} = ح^{\frac{ب-ف}{و}}$$

وذلك لأن $ح^{\frac{ب}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب}}$, $ح^{\frac{ف}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ف}}$ فيكون

$ح^{\frac{ب}{و}} : ح^{\frac{ف}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب}} : \sqrt[و]{ح^{ف}}$ نرفع الطرفين لدرجة و

$\left(ح^{\frac{ب}{و}} : ح^{\frac{ف}{و}}\right)^{و} = ح^{ب} : ح^{ف}$ أو

« « $= ح^{ب-ف}$ نأخذ جذر الطرفين بدرجة و

$ح^{\frac{ب}{و}} : ح^{\frac{ف}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب-ف}}$ أو

« « $= ح^{\frac{ب-ف}{و}}$ وهو المراد

واذا اختلف المقامان فيجنس الكسران ابتداء فى الاستدلال على صحة القاعدة

تطبيق $\text{ح}^{\frac{٣}{٥}} : \text{ح}^{\frac{١}{٥}} = \text{ح}^{\frac{٢}{٥}} \text{ , } \text{ح}^{\frac{٣}{٥}} : \text{ح}^{\frac{١}{٣}} = \text{ح}^{\frac{٤}{١٥}}$

ثالثا ـ اذا كان $\text{م} = ٠ \text{ , } \text{ن} = -\text{ب}$ يكون $\text{ح}^{٠} : \text{ح}^{-\text{ب}} = \text{ح}^{\text{ب}}$

وذلك لان $\text{ح}^{٠} = ١ \text{ , } \text{ح}^{-\text{ب}} = \frac{١}{\text{ح}^{\text{ب}}}$ فيكون

$$\text{ح}^{٠} : \text{ح}^{-\text{ب}} = ١ : \frac{١}{\text{ح}^{\text{ب}}} = \text{ح}^{\text{ب}}$$

تطبيق $\text{ح}^{٠} : \text{ح}^{-٢} = \text{ح}^{٢}$

وقس على هــذا اذا كانت احدى الكميتين ذات أس موجب أو سالب أو كسرى و الاخرى مخالفة لهـا فى الأس

تمـــرين ٤٣

المطلوب اجراء عمليات القسمة الآتية

(١) $\text{ب}^{-٥} : \text{ب}^{-٣}$

(٢) $\text{ح}^{-٣} : \text{ح}^{٤}$

(٣) $\text{د} : \text{د}^{-٥}$

(٤) $\text{ب}^{٠} : \text{ب}^{-٣}$

(٥) $\text{ح د}^{-٢} : \text{ح}^{-٢}\text{ د}$

(٦) $\text{ب}^{\frac{٣}{٥}} : \text{ب}^{\frac{٢}{٥}}$

(٧) $\text{ح}^{\frac{٣}{٤}} : \text{ح}^{\frac{١}{٣}}$

(٨) $\text{د}^{\frac{٢}{٥}} : \text{د}^{\frac{١}{٦}}$

(٩) $\text{ب}^{\frac{٣}{٥}} : \text{ب}^{-\frac{٢}{٥}}$

(١٠) $\text{ح}^{-\frac{٣}{٤}} : \text{ح}^{-\frac{٢}{٥}}$

(١١) $٤\text{ د}^{-٢} : ٢\text{ د}^{-٣}$

(١٢) $٦\text{ ه}^{-٣} : ٣\text{ ه}^{-٢}$

(١٣) $٨\text{ و}^{\frac{١}{٢}} : ٢\text{ و}^{-\frac{١}{٤}}$

(١٤) $١٠\text{ د}^{-\frac{١}{٣}} : ٥\text{ د}^{-\frac{١}{٥}}$

(١٥) $٣\text{ ه}^{\frac{٢}{٥}} : ٧\text{ ه}^{-\frac{٢}{٥}}$

١٧٢ الرفع الى قوة $(ح^{م})^{ن} = ح^{م ن}$ مهما كان م , ن

أولا ـ اذا كان م = − ب , ن = و ويكون

$$(ح^{-ب})^{و} = ح^{-ب و}$$

وذلك لان $ح^{-ب} = \frac{١}{ح^{ب}}$ فيكون

$(ح^{-ب})^{و} = \frac{١}{ح^{ب}} \times \frac{١}{ح^{ب}} \times \frac{١}{ح^{ب}}$ ... مرات بقدر و اى

$$(ح^{-ب})^{و} = \frac{١}{ح^{ب و}} = ح^{-ب و}$$

تطبيق $(ح^{-٢})^{٣} = ح^{-٦}$

ثانيا ـ اذا كان م = $\frac{ب}{و}$, ن = ف فيكون

$$(ح^{\frac{ب}{و}})^{ف} = ح^{\frac{ب ف}{و}}$$

وذلك لان $(ح^{\frac{ب}{و}})^{ف} = ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ب}{و}} \times ح^{\frac{ب}{و}}$ ...مرات

بقدر ف فيكون $(ح^{\frac{ب}{و}})^{ف} = ح^{\frac{ب ف}{و}}$

تطبيق $(ح^{\frac{٣}{٥}})^{٤} = ح^{\frac{١٢}{٥}}$

ثالثا ـ اذا كان م = ٠ , ن = ب يكون $(ح^{٠})^{ن} = ح^{٠}$

وذلك لان $ح^{٠} = ١$ فرفعه الى أى قوة يساوى واحدا او $ح^{٠}$

تطبيق $(ح^{٠})^{٥} = ح^{٠}$

رابعاً ـ اذا كان م = ب , ن = $\frac{هـ}{و}$ يكون

$$(ح^{ب})^{\frac{هـ}{و}} = ح^{\frac{ب هـ}{و}}$$

وذلك لان $(ح^{ب})^{\frac{هـ}{و}} = \sqrt[و]{(ح^{ب})^{هـ}}$ او

$(ح^{ب})^{\frac{هـ}{و}} = \sqrt[و]{ح^{ب هـ}}$ وبموجب (١٦١) يكون

$(ح^{ب})^{\frac{هـ}{و}} = ح^{\frac{ب هـ}{و}}$ وهو المراد

تطبيق $(ح^{٢})^{\frac{٣}{٥}} = ح^{\frac{٦}{٥}}$

تمـــرين ٤٤

المطلوب بيان مقادير الكميات الآتية

(١) $(ب^{-٣})^{٢}$

(٢) $(ح^{-٣})^{٥}$

(٣) $(ى^{-٢})^{٣}$

(٤) $(ب^{\frac{٣}{٥}})^{٢}$

(٥) $\left(ح^{-\frac{٢}{٣}}\right)^{٣}$

(٦) $\left(ى^{\frac{١}{٦}}\right)^{٥}$

(٧) $(ن^{٢})^{\frac{١}{٣}}$

(٨) $(ح^{-٣})^{\frac{٢}{٥}}$

(٩) $(ى^{٥})^{\frac{٣}{٤}}$

(١٠) $(ب^{ن})^{ن}$

(١١) $(ح^{-٢} هـ^{-٣})^{٢}$

(١٢) $(ى^{-١} و^{-١})^{٣}$

(١٣) $(هـ^{-٢} ب^{-٣})^{\frac{٢}{٣}}$

(١٤) $(و^{\frac{١}{٢}} ح^{\frac{١}{٢}})^{\frac{١}{٢}}$

(١٥) $\left(ب^{-\frac{١}{٢}} ى^{-\frac{١}{٤}}\right)^{٢}$

(١٧٣) الجـذر $\sqrt[ن]{ح^{م}} = ح^{\frac{م}{ن}}$ مهما كان م, ن

أولا ـ اذا كان م = ـ ب, ن = و يكون $\sqrt[و]{ح^{-ب}} = ح^{-\frac{ب}{و}}$

لأنه اذا رفع المقدار $ح^{-\frac{ب}{و}}$ الى درجة و (بموجب ١٧٢) يكون

$\left(ح^{-\frac{ب}{و}}\right)^{و} = ح^{-ب}$ نأخذ جذر الطرفين بدرجة و

$ح^{-\frac{ب}{و}} = \sqrt[و]{ح^{-ب}}$ وهو المراد

تطبيق $\sqrt[٣]{ح^{-٢}} = ح^{-\frac{٢}{٣}}$

ثانيا ـ اذا كان م = $\frac{ب}{ف}$, ن = و يكون

$$\sqrt[و]{ح^{\frac{ب}{ف}}} = ح^{\frac{ب}{ف و}}$$

وذلك لأنه اذا رفع المقدار $ح^{\frac{ب}{ف و}}$ الى درجة و (بموجب ١٧٢)

ينتج $\left(ح^{\frac{ب}{و ف}}\right)^{و} = ح^{\frac{ب}{ف}}$ نأخذ جذر الطرفين بدرجة و

فينتج $ح^{\frac{ب}{ف و}} = \sqrt[و]{ح^{\frac{ب}{ف}}}$ وهو المراد

تطبيق $\sqrt[٣]{ب^{\frac{٢}{٥}}} = ب^{\frac{٢}{١٥}}$

ثالثا ـ اذا كان م = ٠ , ن = و يكون $\sqrt[و]{ب^{٠}} = ب^{٠}$

لأن $ب^{٠} = ١$, جذره بأى درجة يساوى ١ أى $ب^{٠}$

تمـــرين ٤٥

المطلوب ايجاد مقادير الكميات الآتية

(١) $\sqrt{\text{ب}^{-٣}}$

(٢) $\sqrt[٣]{\text{ح}^{-٥}}$

(٣) $\sqrt[٥]{\text{د}^{-٢}}$

(٤) $\sqrt{\text{ب}^{\frac{٢}{٣}}}$

(٥) $\sqrt[٣]{\text{ح}^{\frac{٣}{٤}}}$

(٦) $\sqrt[٣]{\text{د}^{\frac{٤}{٥}}}$

(٧) $\sqrt[٥]{\text{ب}^{-\frac{٢}{٣}}}$

(٨) $\sqrt{\text{ح}^{-\frac{٣}{٤}}}$

(٩) $\sqrt[٣]{\text{د}^{-\frac{٢}{٥}}}$

(١٠) $\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}^{٠}}$

(١١) $\sqrt[٣]{\text{ب}^{-٢}}$

(١٢) $\sqrt[٥]{\text{ح}^{-٣}}$

(١٣) $\sqrt[٣]{\text{هـ}^{-٥}}$

(١٤) $\sqrt[٣]{\text{هـ}^{-\frac{٣}{٥}}}$

(١٥) $\sqrt[٥]{\text{و}^{-\frac{١}{٥}}}$

١٧٤ يمكن نقل أى عامل من أحد حدى كسر الى الآخر وتغيير اشارة أس هذا العامل

(مثال ١) $\frac{\text{ح}^{-٣}\,\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}\,\text{ح}^{٣}}$

وذلك لأن $\text{ح}^{-٣} = \frac{١}{\text{ح}^{٣}}$ فيكون

$$\frac{\text{ح}^{-٣}\,\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{١}{\text{ح}^{٣}} \times \frac{\text{د}}{\text{هـ}} = \frac{\text{د}}{\text{هـ}\,\text{ح}^{٣}}$$

(مثال ٢) $\frac{ح}{ء\,هـ^{-٣}} = \frac{ح\,هـ^{٣}}{ء}$

وذلك لأن $هـ^{-٣} = \frac{١}{هـ^{٣}}$ فيكون

$$\frac{ح}{ء\,هـ^{-٣}} = \frac{ح}{ء} : \frac{١}{هـ^{٣}} = \frac{ح\,هـ^{٣}}{ء}$$

(مثال ٣) $\frac{ح^{-٢}}{ء^{-١}} = \frac{ء}{ح^{٢}}$

وذلك لأن $ح^{-٢} = \frac{١}{ح^{٢}}$ و $ء^{-١} = \frac{١}{ء}$ فيكون

$$\frac{ح^{-٢}}{ء^{-١}} = \frac{١}{ح^{٢}} : \frac{١}{ء} = \frac{ء}{ح^{٢}}$$

وهــذه القــاعدة مفيــدة فى تحويل الكسر الذى فى حديه عامل أو عوامل سالبة الى كسر عوامل حديه موجبة

تمــــرين ٤٦

المطلوب تحويل المقادير الآتية الى مقادير مكافئة لها ذات أسس موجبة

(١) $\frac{١}{ح^{-٢}}$

(٢) $\frac{ء}{ب^{-٣}}$

(٣) $\frac{و\,ء^{-٣}}{ح}$

(٤) $\frac{هـ\,ب^{-٥}}{ء\,ح^{-٣}}$

(٥) $\frac{ب^{-٢}\,ح^{-٣}}{ء^{-١}\,هـ^{٢}}$

(٦) $٣\,أ^{-٣}$

(٧) $٤\,س^{-٢}$

(٨) $٢\,ح^{-٣}\,ب^{٢}$

(٩) $٥\,ح^{-٣}\,ء^{٣}$

(١٠) $\frac{ح^{-م}}{ح^{م-١}}$

(١١) $٣\,ح^{-٢}\,ء$

(١٢) $٤\,ء^{-١}\,ح^{-١}$

(١٣) $هـ^{-٢}\,و^{-٣}$

(١٤) $ح^{٢}\,هـ^{-٣}$

(١٥) $ح^{-٣}\,هـ^{-٢}$

١٧٥ بمقتضى القواعد السابقة يمكن اختصار الأوضاع الجبرية التي بها أسس سالبة أو كسرية وتحويلها الى مقادير مكافئة لها ذات أسس موجبة أو صحيحة ونوضح ذلك بالأمثلة الآتية

(مثال ١) $\frac{3\text{ب}^{-2}\times\text{ب}^{3}\times\text{ب}^{-5}}{4\text{ب}^{-3}\times\text{ب}^{-7}\times\text{ب}^{2}}=\frac{3\text{ب}^{-4}}{4\text{ب}^{-8}}=\frac{3}{4}\text{ب}^{4}$

(مثال ٢) $\sqrt[5]{\text{ا}^{-\text{س}}}:\sqrt[5]{\text{ا}^{-2\text{س}}}=\text{ا}^{-\frac{\text{س}}{5}}:\text{ا}^{-\frac{2\text{س}}{5}}=\text{ا}^{\frac{\text{س}}{5}}$

$=\sqrt[5]{\text{ا}^{\text{س}}}$

(مثال ٣) $5\,\text{س}^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{\text{س}^{\frac{1}{2}}}=\frac{5}{\sqrt{\text{س}}}$

تمـــرين ٤٧

ضع المقادير الآتية مختصرة بأسس موجبة

(١) $3\,\text{ب}^{-\frac{1}{3}}\times 5\,\text{ب}^{-1}$

(٢) $3:2\,\text{ب}^{-\frac{1}{2}}$

(٣) $\text{ب}\,\text{ح}^{3}\times\text{ب}^{-1}$

(٤) $\text{ب}^{-3}\text{ح}^{-3}:3\,\text{ح}$

(٥) $\frac{1}{\sqrt[3]{\text{ب}^{5}}}$

(٦) $\frac{1}{\sqrt[3]{\text{ب}^{-5}}}$

(٧) $\frac{\sqrt[5]{\text{ح}^{3}}}{\sqrt{\text{ح}^{-1}}}$

(٨) $\text{ب}^{2}\text{ء}^{-3}:3\,\text{ب}^{-2}\text{ء}^{3}$

(٩) $\text{ب}^{\text{ح}}\text{ء}^{\text{و}}:3\,\text{ب}^{-\text{ح}}\text{ء}^{\text{و}}$

(١٠) $\sqrt[5]{\text{ب}^{-1}}:\sqrt{\text{ب}}$

ضع المقادير الآتية مختصرة تحت علامة جذر باسس موجبة

(١١) $ب^{\frac{3}{4}}$

(١٢) $ب^{-\frac{1}{2}} \times ب^{-\frac{1}{3}}$

(١٣) $3ب : ب^{-\frac{1}{5}}$

(١٤) $\frac{3}{ب^{-\frac{3}{4}}}$

(١٥) $ح^{-\frac{\frac{2}{3}}{3}}$

(١٦) $ب^{\frac{1}{2}} : ب^{-\frac{1}{3}}$

(١٧) $\frac{1}{ح^{-\frac{1}{ب}}}$

(١٨) $\sqrt[3]{ح^{4}} \times \sqrt[4]{ح^{3}}$

(١٩) $\sqrt[3]{ح^{-ب}} : \sqrt{ح^{-2ب}}$

(٢٠) $\sqrt[2ح]{ب} \times \sqrt[ح]{ب^{2}}$

ابحث عن مقادير الكميات الآتية

(٢١) $8^{\frac{2}{3}}$

(٢٢) $81^{-\frac{3}{4}}$

(٢٣) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

(٢٤) $\left(\frac{32}{3125}\right)^{\frac{2}{5}}$

(٢٥) $\left(\frac{81}{2401}\right)^{-\frac{3}{4}}$

(٢٦) $\left(\frac{1}{128}\right)^{-\frac{2}{7}}$

(٢٧) $\left(\frac{729}{4096}\right)^{\frac{1}{6}}$

(٢٨) $\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{6}}$

(٢٩) $0{,}1^{-4}$

(٣٠) $(0{,}512)^{-\frac{1}{3}}$

اختصر المقادير الآتية

(٣١) $\left(\sqrt{ب^{2} ح^{3}}\right)^{5}$

(٣٢) $\left(\sqrt[10]{ب^{-3} ح^{5}}\right)^{-5}$

(٣٣) $(ب^{2} ح^{3})^{-ن} (ب^{-و} ح^{ن})^{3}$

(٣٤) $\left(\frac{81\, ب^{2} س^{2}}{ح^{-2}}\right)^{-\frac{1}{4}}$

(٣٥) $\left(\sqrt[5]{(س^{-1} ص^{\frac{2}{3}})^{3}}\right)^{-\frac{5}{6}}$

(٣٦) $\sqrt[3]{\text{ب}\sqrt{\text{ب}^{-1}}}$

(٣٧) $(125\,\text{ح}^{-2} : 8\,\text{ء}^{3})^{-\frac{1}{3}}$

(٣٨) $(\text{ح ء} : \sqrt[\text{ن}]{\text{ح ء}})^{\text{ن}}$

(٣٩) $\sqrt[4]{(\text{أ}+\text{ب})^{6}} \times (\text{أ}^{2} - \text{ب}^{2})^{-\frac{1}{2}}$

(٤٠) $\left(\frac{1}{\text{ب}}\sqrt[3]{\frac{\text{س}^{-9}}{\text{ح}^{-2}}}\right)^{-\frac{3}{2}} \div \left(\frac{\text{ح}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\text{س}^{-\frac{1}{2}}}}{\text{س}^{2}\,\text{ب}^{-1}}\right)^{-2}$

١٧٦ تنبيه ـ يمكن تطبيق قواعد ضرب وقسمة الكميات كثيرة الحدود واستخراج جذورها التربيعية على كثيرات الحدود التي تكون أسسها سالبة أو كسرية فترتب هذه الكميات بالنسبة للدرجات التصاعدية أو التنازلية لحرف مشترك فيها ثم تجرى عليها عمليات مشابهة لما أجرى على الكميات ذات الأسس الموجبة غير أنه يلاحظ فى ضرب وقسمة حدودها وفى استخراج جذورها ماسبق الكلام عليه فى الحدود ذات الأسس السالبة والكسرية

وعلى الطالب أن يطبق ماذكر على العمليات التى سنذكرها فى التمرين الآتى

تمرين ٤٨

(١) اضرب $4\text{س}^{-1} - 3\text{س}^{-2} + 2\text{س}^{-3} + \text{س}^{-4}$ فى $3\text{س}^{-2} - 2\text{س}^{-3}$

(٢) اضرب $\text{س}^{\frac{1}{3}} + 2\text{س}^{\frac{2}{3}} + 3\text{س} + 4\text{س}^{\frac{4}{3}}$ فى $5\text{س}^{\frac{1}{3}} - 6\text{س}^{\frac{2}{3}}$

(٣) اضرب $٢س^{\frac{٢}{٥}} - ٣س^{\frac{١}{٥}} - ٤ + ٥س^{-\frac{١}{٥}} - ٦س^{-\frac{٢}{٥}}$

في $٣س^{-\frac{١}{٥}} - ٤س^{-\frac{٢}{٥}}$

(٤) اضرب $ح^{س} - ٧ + ٢ح^{-س}$ في $٢ح^{س} + ٥ - ٣ح^{-س}$

(٥) اقسم $٦ب^{-٥} + ٥ب^{-٧} - ٤ب^{-٩} + ٣ب^{-١١}$ على $٢ب^{-٢} + ٣ب^{-٤}$

(٦) اقسم $٦ح^{-١} - ١٣ح^{-\frac{٣}{٢}} + ١٥ح^{-٢} - ١٢ح^{-\frac{٥}{٢}} + ٤ح^{-٣}$ على

$٣ح^{-\frac{١}{٢}} - ٢ح^{-١}$

(٧) اقسم $٦س^{\frac{١}{٥}} - ١٧ - ١٠س^{-\frac{١}{٥}} + ١٦س^{-\frac{٢}{٥}} - ٥٨س^{-\frac{٣}{٥}} +$

$٤٩س^{-\frac{٤}{٥}} - ٣٠س^{-١}$ على $٣س^{-\frac{١}{٥}} - ٤س^{-\frac{٢}{٥}} + ٥س^{-\frac{٣}{٥}}$

ابحث عن الجذور التربيعية للكميات الآتية

(٨) $س^{-\frac{٢}{٥}} - ٢س^{-\frac{٣}{٥}} + ٣س^{-\frac{٤}{٥}} - ٢س^{-١} + س^{-\frac{٦}{٥}}$

(٩) $٤ب^{\frac{٢}{٣}} - ١٢ب^{\frac{١}{٣}} + ١٣ - ٦ب^{-\frac{١}{٣}} + ب^{-\frac{٢}{٣}}$

(١٠) $\frac{٤}{س} + \frac{٢٠}{\sqrt{س}} + ١٣ - ٤٦\sqrt{س} - ٣١س + ٢٤\sqrt{س^{٣}} + ١٦س^{٢}$

الجـــذور الصماء

١٧٧ تمهيد تقدم بنمرة (١٥٨) أن كل حد غير مربع كامل يبين جذره بوضعه تحت علامة الجذر ويسمى مقدارا غيرجذرى أوجذرا أصم وبالتبعية لذلك فكل حد لاتقبل أسس عوامله القسمة على دليل جذره ينبغى أن يبقى تحت علامة الجذر ويسمى أيضا جذرا أصم

وحينئذ فلاحاجة لأن يبق تحت علامة جذر حدود أوكميات يمكن استخراج جذورها الحقيقية

فمثل الكميات $\sqrt{٤٩}$ و $\sqrt{ح^{٢} ء^{٤}}$ و $\sqrt[٣]{ح^{٦}}$ يمكن استخراج جذورها وتؤول الى ٧ , $ح ء^{٢}$, $ح^{٢}$

وأما مثل الكميات $\sqrt{٥}$, $\sqrt{ح}$, $\sqrt[٣]{ح^{٢}}$ التى لايمكن ايجـاد مقاديرها الحقيقية تسمى جذورا صماء

وممـا ذكر يستنتج التعريف الآتى

١٧٨ الجذر الاصم هوكمية موضوعة تحت علامة جذر ولا يمكن استخراج مقدار جذرها الحقيق

مثل $\sqrt{٥}$, $\sqrt{ح}$ فانه لايمكن ايجاد عدد صحيح ولاعددكسرى اذا ضرب فى مثله ينتج ٥ وكذا لايمكن ايجاد مقدار اذا ضرب فى مثله ينتـــج ح

تنبيه ــ الجذور الصماء الاكثر استعمالا هى الجذور ذات الدرجة الثـانية (التربيعية)

١٧٩ قد يراد فى بعض الاحيان اجراء عمليات على الجذور ولذا ينبغى أن نشرح عمليات الجذور وهى وان كانت عامة غير ان ضرورة استعمالها يكون فى الجذور الصماء

عمليـات الجـــذور

١٨٠ تعريف ــ الجذور المتشابهة هى مااتحدت فيها الكميات التى تحت علامة الجذر واتحدت درجة أدلتها

فالجذور $٣\sqrt{ح د}$ ، $٤\sqrt{ح د}$ ، $-٥\sqrt{ح د}$ هي جذور متشابهة

١٨١ قاعدة ـ لجمـــع أو طرح جذور متشابهة تجمع أو تطرح مكرراتها ثم يوضع الناتج مكررا لاحد الجذور

فمجموع الجــذرين $٥\sqrt{ح}$ ، $٦\sqrt{ح}$ هو $١١\sqrt{ح}$

ومجموع الجذرين $٩\sqrt{هـ}$ ، $-١٤\sqrt{هـ}$ هو $-٥\sqrt{هـ}$

وباقي طرح $٥\sqrt{هـ}$ من $٨\sqrt{هـ}$ هو $٣\sqrt{هـ}$

وباقي طرح $-٥\sqrt{هـ}$ من $٨\sqrt{هـ}$ هو $١٣\sqrt{هـ}$

تنبيه ـ اذا كانت الجذور غير متشابهة فيبين مجموعها أو باقي طرحها بواسطة العلامات

فمجموع الجذرين $٣\sqrt{ح}$ ، $٧\sqrt{د}$ هو $٣\sqrt{ح} + ٧\sqrt{د}$

وباقي طرح الاول من الثاني هو $٧\sqrt{د} - ٣\sqrt{ح}$

١٨٢ قاعـدة ـ لضرب جذرين متحدي الدليـــل يضرب المكرران ويؤخذ جذر حاصل ضربهما بالدليل الاصلي

فعلى هذا يكون $٥\sqrt{ح} \times ٧\sqrt{د} = ٣٥\sqrt{ح د}$

وذلك لأنه اذا فرض أن $٥\sqrt{ح} \times ٧\sqrt{د} = س$ ورفع الطرفان الى القوة الثانية ينتج

$(٥\sqrt{ح} \times ٧\sqrt{د})^{٢} = س^{٢}$ وبموجب نمرة ١٥٢ يكون

$٥^{٢} \times ٧^{٢} \times ح د = س^{٢}$ وبأخذ جذر الطرفين يحدث

$٥ \times ٧\sqrt{ح د} = س$ وباستعاضة س بمقدارها ينتج

$$٣٥\sqrt{ح د} = ٥\sqrt{ح} \times ٧\sqrt{د}$$

١٨٣ قاعدة ــ لقسمة جذرين متحدى الدليـل يقسم مكرر المقسوم على مكرر المقسوم عليه ثم تقسم الكميتان اللتـان تحت علامة الجذر ويؤخذ جذر خارجهما بالدليل الاصلى

مثلا $١٢\sqrt{ح} : ٤\sqrt{ء} = \frac{١٢}{٤}\sqrt{\frac{ح}{ء}} = ٣\sqrt{\frac{ح}{ء}}$

وذلك لأنه اذا فرض أن $١٢\sqrt{ح} : ٤\sqrt{ء} = س$ يكون

$١٢\sqrt{ح} = ٤\sqrt{ء} \times س$ وبتربيع طرفى هذه المتساوية يحدث

$١٤٤\,ح = ١٦\,ء\,س^{٢}$ وبقسمة الطرفين على ١٦ ء ينتج

$\frac{١٤٤\,ح}{١٦\,ء} = س^{٢}$ أو

$\frac{١٤٤}{١٦} \times \frac{ح}{ء} = س^{٢}$ ويأخذ جذر الطرفين ينتج

$\frac{١٢}{٤}\sqrt{\frac{ح}{ء}} = س$ واذا وضع بدلا عن س مقداره ينتج

$١٢\sqrt{ح} : ٤\sqrt{ء} = \frac{١٢}{٤}\sqrt{\frac{ح}{ء}} = ٣\sqrt{\frac{ح}{ء}}$

١٨٤ تنبيه ــ يمكن ضرب او قسمة جذرين مختلفى الدليـل بواسـطة تحويلهما الى مقـــدارين ذوى أسس كسرية ثم ضرب أو قسمة المقدارين الناتجين بموجب قاعدة ١٧٠ أو ١٧١

١٨٥ اخراج عامل من تحت علامة الجذر

أولا ــ اذا احتوى جذر تربيعى أصم على عوامل زوجية يمكن اخراج تلك العوامل من تحت علامة الجـــذر باســتخراج جذرهـا ثم ضرب الناتج فى الكمية البـاقية موضوعة تحت علامة الجذر

مثلا $\sqrt{ح^{4} ء} = ح^{2} \sqrt{ء}$ وذلك لأن الكمية $ح^{4} ء$ هى حاصل ضرب $ح^{4}$ فى $ء$ وبمقتضى نمرة ١٨٢ يكون

$$\sqrt{ح^{4} ء} = \sqrt{ح^{4}} \times \sqrt{ء} = ح^{2} \sqrt{ء}$$

ثانيا — اذا احتوى الجذر الأصم على عوامل ذات أسس فردية (غير الواحد) يحلل الى عاملين أحدهما مربع كامل ويؤخذ جذره ثم يضرب الناتج فى الكمية الباقية موضوعة تحت علامة الجذر

مثلا $\sqrt{ح^{5} ء^{3} هـ} = ح^{2} ء \sqrt{ح ء هـ}$, $\sqrt{18 ح^{4} ء} = 3 ح^{2} \sqrt{2 ء}$ ويستدل على ذلك كما فى المثال السابق

تنبيه — تسمى هذه العملية باختصار الجذر الأصم

١٨٦ ادخال مكرر تحت علامة الجذر — لذلك يربع هذا المكرر ويضرب فى الكمية التى تحت علامة الجذر ثم يوضع الناتج تحت علامة الجذر

مثـــلا $3\sqrt{ح} = \sqrt{9 ح}$

لأن $3\sqrt{ح} = \sqrt{3^{2}} \times \sqrt{ح} = \sqrt{9 ح}$

تمـــرين ٤٩

اختصر الاوضاع الجبرية الآتية

(١) $ء\sqrt{ب} + هـ\sqrt{ب} + و\sqrt{ب}$

(٢) $-3\sqrt{ح} - 2\sqrt{ح} - \sqrt{ح}$

(٣) $7\sqrt{ح ء} - (-2\sqrt{ح ء} - 3\sqrt{ح ء})$

(٤) $ا\sqrt{ء و} + (ب\sqrt{ء و} - ح\sqrt{ء و})$

(٥) $٣\sqrt{\text{ح}} \times ٦\sqrt{\text{ء}}$

(٦) $٧\sqrt{\text{هو}} \times \sqrt{\text{ح}}$

(٧) $\sqrt{٣\text{س}} \times \sqrt{٥\text{س}}$

(٨) $٤\sqrt{\text{حء}} \times \frac{٣}{٤}\sqrt{\text{حء}}$

(٩) $\text{ح}\sqrt{\text{هـ} - \text{و}} \times \text{ء}\sqrt{\text{هـ} - \text{و}}$

(١٠) $\sqrt{\text{ا} + \text{ب}} \times \sqrt{\text{ا} - \text{ب}}$

(١١) $(\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{ح}}) \times ٢\sqrt{\text{ب}}$

(١٢) $(٣\sqrt{\text{ا}} - ٢\sqrt{\text{ب}})(٢\sqrt{\text{ا}} - ٣\sqrt{\text{ب}})$

(١٣) $٤\sqrt{\text{ح}^٢\text{ء}} : ٢\sqrt{\text{ء}^٢\text{ح}}$

(١٤) $١٠\sqrt{\text{ء}\,\text{هـ}^٣} : ٥\sqrt{\text{ح}\,\text{هـ}^٣}$

(١٥) $\sqrt{٢٥\text{ح}^٢\text{ء}^٣\text{ب}} : \sqrt{٥\text{ح}^٢\text{ء}^٣}$

(١٦) $\sqrt{٢\text{بحء}} : \sqrt{٤\text{حءهـ}}$

(١٧) $\sqrt{٢٤} - ٢\sqrt{٦}$

(١٨) $٥\sqrt{١٢} + \sqrt{٣}$

(١٩) $٣\sqrt{١٨} - \sqrt{٢}$

(٢٠) $٢\sqrt{٢٧} - \frac{٣}{٤}\sqrt{٣}$

(٢١) $\frac{\sqrt{٣} + \sqrt{٢٧} - ٥\sqrt{١٢}}{٤\sqrt{١٢}}$

(٢٢) $\frac{٥\sqrt{١٨} - ٧\sqrt{٨} + ٩\sqrt{٣٢}}{٥\sqrt{١٨}}$

(٢٣) $٣\sqrt[٥]{\text{ب}} \times ٤\sqrt[٣]{\text{ب}}$

(٢٤) $١٢\sqrt[٣]{\text{ح}} : ٣\sqrt{\text{ح}}$

ازالة بعض الجذور

١٨٧ ازالة جذور صماء من المقامات

أولا ـ اذا كان مقام كسر جذرا أصم فيمكن ازالته بضرب حدّى الكسر فى هذا الجذر

مثلا $\frac{٣}{\sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٣\sqrt{٢}}{٢}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\sqrt{\text{ح}}} = \frac{\text{هـ}\sqrt{\text{ح}}}{\sqrt{\text{ح}}\sqrt{\text{ح}}} = \frac{\text{هـ}\sqrt{\text{ح}}}{\text{ح}}$

ثانيـا ـ اذا كان مقام كسر كميـة ذات حدّين أحدهما أو كلاهما جذرا أصم فيمكن حذف الجذر الأصم بضرب حدّى الكسر فى كمية مثلها مع تغيير علامة الحد الثانى

المثال الاول $\frac{\text{ح}}{\text{د}+\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\text{ح}(\text{د}-\sqrt{\text{ب}})}{(\text{د}+\sqrt{\text{ب}})(\text{د}-\sqrt{\text{ب}})}$

$= \frac{\text{ح}\,\text{د}-\text{ح}\sqrt{\text{ب}}}{\text{د}^2-\text{ب}}$

المثال الثانى $\frac{\text{ح}}{\sqrt{\text{د}}-\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\text{ح}(\sqrt{\text{د}}+\sqrt{\text{ب}})}{(\sqrt{\text{د}}-\sqrt{\text{ب}})(\sqrt{\text{د}}+\sqrt{\text{ب}})}$

$= \frac{\text{ح}\sqrt{\text{د}}+\text{ح}\sqrt{\text{ب}}}{\text{د}-\text{ب}}$

تنبيه ـ اذا كان المقام كمية ذات ثلاثة حدود فيمكن أن نعتبر حدين منها كأنهما حد واحد وحينئذ يكون المقام كأنه كمية ذات حدين نجرى عليه ماسبق

١٨٨ قاعدة ـ اذا اشـتملت معادلة على جذر تربيعى يمكن ازالته منها ولذلك يوضع الجذر بانفراده فى أحد الطرفين وباقى الحدود فى الطرف الآخر ثم يربع الطرفان

ففى المعادلة $\text{ح}+\text{ب}\sqrt{\text{س}}=\text{د}$ نحول ح الى الطرف الثـانى فيحدث $\text{ب}\sqrt{\text{س}}=\text{د}-\text{ح}$ ثم نربع الطرفين فيحدث

$\text{ب}^2\,\text{س}=\text{د}^2-2\,\text{ح}\,\text{د}+\text{ح}^2$

واذا احتوت المعادلة على جذرين تربيعيين فقد يمكن ازالتهما

ففى المعادلة $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{س} - \text{ح}} = \text{ى}$ نحول $\sqrt{\text{س}}$ الى الطرف الثانى فيحدث

$\sqrt{\text{س} - \text{ح}} = \text{ى} - \sqrt{\text{س}}$ ثم نربع الطرفين

فيحدث $\text{س} - \text{ح} = \text{ى}^{٢} - ٢\,\text{ى}\sqrt{\text{س}} + \text{س}$

وبالاختصار والتحويل يحدث

$٢\,\text{ى}\sqrt{\text{س}} = \text{ى}^{٢} + \text{ح}$ وبتربيع الطرفين

يحدث $٤\,\text{ى}^{٢}\,\text{س} = \text{ى}^{٤} + ٢\,\text{ى}^{٢}\,\text{ح} + \text{ح}^{٢}$

تمرين ٥٠

المطلوب ازالة الجذور من مقامات الكسور الآتية

(١) $\frac{٥}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{٤}{٢\sqrt{٣}}$

(٢) $\frac{\text{ى}}{\sqrt{\text{س}}}$ ، $\frac{\text{هـ}}{\text{ح}\sqrt{\text{ى}}}$

(٣) $\frac{٣ + \sqrt{٥}}{\sqrt{٥}}$

(٤) $\frac{٤ - \sqrt{٣}}{٢\sqrt{٣}}$

(٥) $\frac{٧ - ٢\sqrt{٣}}{٤\sqrt{٣}}$

(٦) $\frac{٨ - ٢\sqrt{٥}}{٣ - ٨\sqrt{٥}}$

(٧) $\frac{٤ + ٨\sqrt{٢}}{٥ + ٢\sqrt{٨}}$

(٨) $\frac{٨ + ٣\sqrt{٢} - \sqrt{٣}}{٣\sqrt{٢} + \sqrt{٣}}$

(٩) $\frac{\text{ح} - \sqrt{\text{ى}}}{\text{هـ} - \sqrt{\text{ى}}}$

(١٠) $\frac{\text{ح} + \sqrt{\text{هـ}} - \sqrt{\text{و}}}{\sqrt{\text{هـ}} - \sqrt{\text{و}}}$

(١١) $\frac{\sqrt{\text{ب}}}{\sqrt{\text{ب}} - \sqrt{\text{ح}}}$

(١٢) $\frac{٧\sqrt{١٨} - ٣\sqrt{٢}}{٦\sqrt{٣} - ٢\sqrt{١٢} + \sqrt{٢}}$

(١٣) $\frac{١}{\sqrt{٢} + \sqrt{٣} - \sqrt{٥}}$

(١٤) $\frac{٤ + \sqrt{٢} - \sqrt{٣}}{٣ - \sqrt{٢} + \sqrt{٣}}$

المطلوب ازالة الجذور من المعادلات الآتية وحلها

(١٥) $٧ - \sqrt{س - ٤} = ٣$

(١٦) $\sqrt[٣]{٤س - ٧} = ٥$

(١٧) $١٣ - \sqrt[٣]{٥س - ٤} = ٧$

(١٨) $د - ب\sqrt{س} = -ح$

(١٩) $س + \sqrt{س^{٢} - ب} = ح$

(٢٠) $\sqrt{٨س + ٣٣} - ٣ = ٢\sqrt{٢س}$

(٢١) $٢\sqrt{٣ - ٧س} - ٣\sqrt{٨ - ١٢س} = ٠$

(٢٢) $١٠ - \sqrt{٢٥ + ٩س} = ٣\sqrt{س}$

(٢٣) $\sqrt{ح + س} = \sqrt{س} + د$

(٢٤) $د\sqrt{ح} - هـ\sqrt{د} = ب$

الكميات التخيلية

١٨٩ من المعلوم أن مربع أى عدد موجب او سالب لايكون الا موجبا وحينئذ فكل كمية سالبة لا يكون لها جذر تربيعى مطلقا ومتى وضعت تحت علامة الجذر تسمى كمية تخيلية.

مثلا $\sqrt{-٢٥}$ و $\sqrt{-ح^{٢}}$ تسمى كمية تخيلية اذ لا يوجد كمية موجبة ولا سالبة اذا رفعت الى القوة الثانية ينتج -٢٥ أو $-ح^{٢}$.

١٩٠ كل كمية تخيلية يمكن تحليلها الى عاملين أحدهما جذر هذه الكمية مأخوذة موجبة والثانى $\sqrt{-١}$

مثلا $\sqrt{-ح^٢} = \sqrt{ح^٢} \times \sqrt{-١} = ح\sqrt{-١}$

و $\sqrt{-ح} = \sqrt{ح} \times \sqrt{-١}$ وحيث انه يمكن ايجاد $\sqrt{ح}$ بمقدار تقريبي فاذا رمز له بحرف $ح'$ يكون $\sqrt{-ح} = ح'\sqrt{-١}$

فالعامل التخيلي الوحيد هو $\sqrt{-١}$

عمليات الكميات التخيلية

١٩١ قبل الكلام على عمليات الكميات التخيلية نبحث عن القوى المختلفة للعامل التخيلي $\sqrt{-١}$ فنجد

أولا $(\sqrt{-١})^١ = \sqrt{-١}$

ثانيا $(\sqrt{-١})^٢ = \sqrt{-١} \times \sqrt{-١} = -١$

ثالثا $(\sqrt{-١})^٣ = (\sqrt{-١})^٢ \times \sqrt{-١} = -\sqrt{-١}$

رابعا $(\sqrt{-١})^٤ = (\sqrt{-١})^٢ \times (\sqrt{-١})^٢ =$

$-١ \times -١ = ١$

خامسا $(\sqrt{-١})^٥ = (\sqrt{-١})^٤ \times \sqrt{-١} = \sqrt{-١}$

وحيث ان القوة الخامسة هى عين الاولى فبالاستمرار يشاهد أن القوة السادسة عين الثانية وهكذا أعنى أن قوى العامل التخيلى $\sqrt{-١}$ تتغير تغييرا دوريا أربعة فأربعة وتأخذ فى كل دور الاربع الصور السابقة

اذا تقرر هـذا فيلاحظ فى ضرب وقسمة الكميات التخيلية تحليل كل منها الى عاملين كما فى (١٩٠) واجراء عمليات الضرب على العامل التخيلى $\sqrt{-١}$ بمقتضى ماذكر آنفا ـ أما عمليات جمع وطرح الكميات التخيلية فينطبق عليها قواعد عمليات الجذور الصماء ولنوضح ذلك بالامثلة الآتية

$$\text{(مثال ١)}\quad ٢\sqrt{-ح^{٢}}+٣\sqrt{-ح^{٢}}=٥\sqrt{-ح^{٢}}=٥ح\sqrt{-١}$$

$$\text{(مثال ٢)}\quad ٧\sqrt{-ح^{٢}}-٣\sqrt{-ح^{٢}}=٤\sqrt{-ح^{٢}}=٤ح\sqrt{-١}$$

$$\text{(مثال ٣)}\quad \sqrt{-ح^{٢}}\times\sqrt{-د^{٢}}=ح\sqrt{-١}\times د\sqrt{-١}=-ح د$$

$$\text{(مثال ٤)}\quad \sqrt{-ح^{٢}}\times\sqrt{-د^{٢}}\times\sqrt{-هـ^{٢}}=ح\sqrt{-١}\times د\sqrt{-١}\times هـ\sqrt{-١}=-ح د هـ\sqrt{-١}$$

$$\text{(مثال ٥)}\quad ٤\sqrt{-ح^{٢}}:٢\sqrt{-د^{٢}}=٤ح\sqrt{-١}:٢د\sqrt{-١}=\frac{٢ح}{د}$$

$$\text{(مثال ٦)}\quad \sqrt{-ح^{٢}}:د=\frac{ح\sqrt{-١}}{د}=\frac{ح}{د}\sqrt{-١}$$

$$\text{(مثال ٧)}\quad ح:\sqrt{-د^{٢}}=\frac{ح}{\sqrt{-د^{٢}}}=\frac{ح\sqrt{-د^{٢}}}{-د^{٢}}=-\frac{ح د\sqrt{-١}}{د^{٢}}=-\frac{ح}{د}\sqrt{-١}$$

وينتج مما تقدم أن حاصل ضرب كميتين تخيليتين هو كمية حقيقية سلبية (أنظر مثال ٣) وحاصل ضرب ثلاث كميات تخيلية هو كمية سالبة تخيلية (أنظر مثال ٤)

وخارج قسمة كميتين تخيليتين هو كمية حقيقية (أنظر مثال ٥) وخارج قسمة كمية تخيلية على كمية حقيقية هو كمية تخيلية (أنظر مثال ٦) وخارج قسمة كمية حقيقية على كمية تخيلية هو كمية تخيلية (أنظر مثال ٧)

تمرين ٥١

اختصر الكميات الآتية

(١) $٥\sqrt{-١} + ٣\sqrt{-١} - ٧\sqrt{-١}$

(٢) $٥\sqrt{-ء^٢} + ٢\sqrt{-ء^٢} + ٤\sqrt{-ء^٢}$

(٣) $٢\sqrt{-١٦} + ٨\sqrt{-٤} - \sqrt{-٢٥}$

(٤) $٤\sqrt{-٨} + ٣\sqrt{-٣٢} - ٢\sqrt{-٢}$

(٥) $٢أ + \sqrt{-ب ح^٢} - أ + \sqrt{-٤ ب ح^٢}$

(٦) $٤أب + \sqrt{-١٢أ^٢ب} + \sqrt{-٣أ^٢ب}$

(٧) $\sqrt{-ء^٢} \times \sqrt{-و^٢}$

(٨) $٣\sqrt{-ب} \times ٤\sqrt{-ح^٢}$

(٩) $\sqrt{-م^٢} \times \sqrt{-ه^٢} \times \sqrt{-و^٢}$

(١٠) $\sqrt{-٤ب} \times ٥\sqrt{-ح^٢} \times \sqrt{-ء^٢}$

(١١) $\sqrt{-ح^٢ء^٢} \times \sqrt{-ه^٢و^٢}$

(١٢) $\sqrt{-م ن} : \sqrt{-م^٢ن^٢}$

(١٣) $٨\sqrt{-م^٤} : ٢م$

(١٤) $\sqrt{-(ح+ء)^٢} : (ح + ء)$

(١٥) $ه : \sqrt{-أ^٢ب}$

(١٦) $ح - ء : \sqrt{-(ح-ء)^٢}$

اللوغاريتم

١٩٢ تعريف لوغاريتم أى عدد بالنسبة لعـدد ثابت يسمى قاعدة هو الأس الذى ترفع اليـه هـذه القاعدة ليكون الناتج مساويا للعدد الاصلى

مثلا معلوم أن $٤^{٣}$ = ٦٤ فيكون لوغاريتم ٦٤ بالنسبة للقاعدة ٤ هو ٣
وكذا معلوم أن $٨^{٢}$ = ٦٤ » » ٦٤ » » ٨ » ٢
ومعلوم أن $٣^{٤}$ = ٨١ » » ٨١ » » ٣ » ٤
وكذا معلوم أن $٩^{٢}$ = ٨١ » » ٨١ » » ٩ » ٢

وعلى العموم اذا كان $ب^{ء}$ = حـ فيكون لوغاريتم حـ بالنسبة للقاعدة ب هو ء

ومن حيث ان $١٠^{١}$ = ١٠ و $١٠^{٢}$ = ١٠٠ و $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠ و $١٠^{٤}$ = ١٠٠٠٠ وهكذا فتكون الأعداد ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ هى لوغاريتمات الأعداد ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ و ١٠٠٠٠ الخ بالنسبة للقـاعدة ١٠

فمن الأمثلة السابقـة يتبين اختلاف المقـادير التى يمكن اعتبارها لوغاريتمات لعدد واحد باختلاف العدد الثابت الذى يتخذ قاعدة

وتكتب معادلة اللوغاريتم عادة بأحد الصورتين

$ب^{ء}$ = حـ أو $لو_{ب}$ حـ = ء

واللوغاريتمات التى أساسها ١٠ أى التى فيها القاعدة ب = ١٠ تسمى باللوغاريتمات المعتادة وهى المستعملة ولا لزوم لبيان القاعدة فيها وعلى هذا اذا كتب لو حـ = ء دل ذلك على لوغاريتم حـ بالنسبة للقاعدة ١٠ هو ء

خواص اللوغاريتمات

١٩٣ نظرية ١ ـ لوغاريتم الواحد يساوى صفرا

البرهان ـ معلوم أن ب^{٠} = ١ ومن حيث ان هذه المعادلة صحيحة مهما كان مقدار ب فحينئذ يكون لوغاريتم الواحد يساوى صفرا مهما كانت القاعدة

١٩٤ نظرية ٢ ـ لوغاريتم القاعدة يساوى واحدا

البرهان ـ معلوم أن ب^{١} = ب ومن حيث ان هذه المعادلة صحيحة مهما كان مقدار ب فيتضح أن لوغاريتم القاعدة يساوى واحدا

١٩٥ نظرية ٣ ـ لوغاريتم حاصل ضرب عددين يساوى مجموع لوغاريتميهما

مثلا اذا فرض أن لو$_{ب}$ ح = ء , لو$_{ب}$ هـ = و يكون لو$_{ب}$ ح هـ = ء + و

البرهان ـ يؤخذ من الفرض أن

ح = ب^{ء} , هـ = ب^{و} فبضرب احدى هاتين المتساويتين فى الأخرى ينتج

ح هـ = ب^{ء} × ب^{و} = ب$^{ء + و}$ ومن هذه المتساوية يؤخذ أن

لو$_{ب}$ ح هـ = ء + و وهو المطلوب

مثلا لو ٣٥ = لو ٥ + لو ٧

وبمثل هذا يستدل على أن لوغاريتم حاصل ضرب عدة عوامل يساوى مجموع لوغاريتماتها

مثلا $\text{لو}(\text{ا} \times \text{ح} \times \text{ء}) = \text{لو ا} + \text{لو ح} + \text{لو ء}$

١٩٦ نظرية ٤ ـ لوغاريتم خارج القسمة يساوى لوغاريتم المقسوم ناقصا لوغاريتم المقسوم عليه

مثلا اذا فرض أن $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ح} = \text{ء}$, $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{هـ} = \text{و}$ يكون
$\text{لو}\,\frac{\text{ح}}{\text{هـ}} = \text{ء} - \text{و}$

البرهان ـ يؤخذ من الفرض أن

$\text{ح} = \text{ب}^{\text{ء}}$, $\text{هـ} = \text{ب}^{\text{و}}$ وبقسمة المتساوية الاولى على الثانية ينتج

$\frac{\text{ح}}{\text{ء}} = \text{ب}^{\text{ء}} : \text{ب}^{\text{و}} = \text{ب}^{\text{ء}-\text{و}}$ ومن هذه المعادلة يؤخذ أن

$\text{لو}_{\text{ب}}\,\frac{\text{ح}}{\text{هـ}} = \text{ء} - \text{و}$ وهو المراد

يؤخذ من هذه النظرية أن لوغاريتم الكسر الاعتيادى يساوى لوغاريتم بسطه ناقصا لوغاريتم مقامه

١٩٧ نظرية ٥ ـ لوغاريتم أى عدد مرفوع الى قوّة مّا (صحيحة اوكسرية) يساوى لوغاريتم العدد مضروبا فى درجة القوّة

مثلا اذا فرض أن $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ح} = \text{ء}$ يكون $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{ح}^{\text{ن}} = \text{ء ن}$

البرهان ـ يؤخذ من الفرض أن $\text{ح} = \text{ب}^{\text{ء}}$ وبرفع الطرفين الى درجة ن ينتج $\text{ح}^{\text{ن}} = \text{ب}^{\text{ء ن}}$

ومن هذه المتساوية يؤخذ أن $\text{لـو}_{\text{ب}}\,\text{ح}^{\text{ن}} = \text{ء}\,\text{ن}$

وبمثل هذا يبرهن على الحالة التى تكون فيها ن كسرا وليكن $\frac{١}{\text{ر}}$

مثـــلا $\text{لـو}_{\text{ب}}\,\text{ح}^{\frac{١}{٥}} = \frac{١}{٥}\,\text{لـو}_{\text{ب}}\,\text{ح} = \frac{\text{لـو}_{\text{ب}}\,\text{ح}}{٥}$

ومن حيث ان $\text{ح}^{\frac{١}{٥}}$ هو عبارة عن $\sqrt[٥]{\text{ح}}$ فيمكن أن يقـال ان لوغاريتم جذر أى كمية بدليل مّا يساوى لوغاريتم هذه الكمية مقسوما على دليل الجذر

اللوغاريتمـات المعتادة

١٩٨ اللوغاريتمات المعتادة هى التى يكون أسـاسها ١٠ وتبين بالمعادلة $١٠^{\text{س}} = \text{ح}$ أو $\text{لو}\,\text{ح} = \text{س}$

ومن المعادلة $١٠^{\text{س}} = \text{ح}$ يعلم أن اللوغاريتمـات المعتادة لاتكون كلها أعدادا صحيحة ولا تكون دائمـا موجبة

مثلا من حيث ان $١٠^{٣} > ٧٢٨ > ١٠^{٢}$
فيكون لوغاريتم ٧٢٨ أكبر من ٢ وأقل من ٣ أى لو ٧٢٨ = ٢ + كسر ومن حيث ان $١٠^{-١} > ٠٫٠٤ > ١٠^{-٢}$ فيكون
لو ٠٫٠٤ أكبر من − ٢ وأقل من − ١
أعنى لو ٠٫٠٤ = − ٢ + كسر

ويشاهد أن اللوغاريتم يتركب من عدد صحيح وكسر فالعدد الصحيح من اللوغاريتم يسمى بالعدد البيانى

١٩٩ لمعرفة العــدد البيانى من لوغاريتم أى عدد يقال حيث ان العــدد المركب من آحاد وعشرات محصور بين $١٠^{١}$ و $١٠^{٢}$ فيكون لوغاريتمه محصورا بين ١ و ٢ أى انه واحد وكسر

والعدد المركب من آحاد وعشرات ومئات محصور بين $١٠^{٢}$ و $١٠^{٣}$ فيكون لوغاريتمه محصورا بين ٢و٣ أى انه ٢ وكسر

وعلى العموم العــدد ح المركب من أرقام عددها ن يكون محصورا بين $١٠^{ن-١}$ و $١٠^{ن}$ أى لو ح = (ن − ١) + كسر

أعنى أن العدد البيانى من اللوغاريتم هو ن − ١ وهو أقل بواحد من عدد أرقام العدد

ومن هنا تستنتج القاعدة الآتية

قاعدة ـ العــــدد البيــانى من لوغاريتم أى عدد صحيح يساوى وحدات بقدر عدد أرقامه ناقصا واحدا

(مثلا) العدد البيانى من لوغاريتم ٣٤٦٧٥ هو ٤ والعدد البيانى من لوغاريتم ٨٣٤,٦٧٥ هو ٢

ومن حيث ان $١٠^{١}$ = ١٠ و $١٠^{٠}$ = ١ فكل عدد أكبر من الواحد يكون لوغاريتمه أكبر من الصــفر أى موجبــا وكل عدد أقل من ١٠ لايوجد فى لوغاريتمه عدد بيانى

٢٠٠ كل عدد أقل من الواحد يكون العدد البيانى من لوغاريتمه سالبا ولايجاده يقال

الكسر الاعشارى الذى بين اول رقم معنوى منه والشرطة صفر مثل ٠,٠٥٢٨ هو أكبر من ٠,٠١ وأصغر من ٠,١ أى محصور بين 10^{-2} و 10^{-1}

والكسر الاعشارى الذى بين أول رقم معنوى منه والشرطة صفران مثل ٠,٠٠٥٢٨ هو أكبر من ٠,٠٠١ وأقل من ٠,٠١ أى محصور بين 10^{-3} و 10^{-2}

وعلى العموم فالكسر الاعشارى الذى بين أول رقم معنوى منه والشرطة أصفار عددها ن هو أكبر من $10^{-(\text{ن}+1)}$ وأصغر من $10^{-\text{ن}}$

فاذا فرض أن ء هو كسر اعشارى بين أول رقم معنوى منه والشرطة أصفار عددها ن تكون

$$\text{ء} = 10^{-(\text{ن}+1)+\text{كسر}}$$

ويكون

$$\text{لو ء} = -(\text{ن}+1) + \text{كسر}$$

وحينئذ تستنتج القاعدة الآتية

قاعدة ـ العدد البيانى من لوغاريتم عدد أقل من الواحد هو سالب ويساوى وحدات بقدر عدد الاصفار التى بعد الشرطة مباشرة زائدا واحدا

أو بعبارة أخرى هو عدد سالب يستدل عليه برتبة أول رقم معنوى بعد الشرطة

مثلا العدد البيانى من لوغاريتم العدد ٠,٠٣٢٥ هو — ٢

والعدد البيانى من لوغاريتم العدد ٠,٠٠٠٥ هو — ٤

وتوضع علامة — فوق العــدد البيانى الســالب فلوغاريتم ٠,٠٠٥ يبين هكذا (كسر و $\overline{٣}$)

١٠٣ الجزء الاعشارى من لوغاريتمات الاعداد المركبة من أرقام معنوية واحدة يكون متحدا فيها

مثــلا الجزء الاعشــارى من لوغاريتمات الاعداد ٤٨ و ٤٨٠ و ٤٨٠٠ و ٤,٨ و ٠,٤٨ و ٠,٠٠٤٨ و ٠,٠٠٠٤٨ يكون متحدا ولوغاريتمات هذه الاعداد لا يفترق بعضها عن بعض الا فى العدد البيانى

وذلك لان كل عددين مركبــين من أرقام معنوية متحدة بترتيب واحد يكون أحدهما مساويا للآخر مضروبا فى عدد ١٠ مرفوعة الى قوة درجتها موجبة أو سالبة

(مثلا) حيث ان ٤٨٠٠ = ٤٨ × ١٠٠ فيكون

لو ٤٨٠٠ = لو ٤٨ + لو ١٠٠ = لو ٤٨ + ٢ (كما فى ١٩٥)

وان ٠,٠٠٠٤٨ = ٤٨ × ١٠ $^{-٥}$ فيكون

لو ٠,٠٠٠٤٨ = لو ٤٨ — ٥ (كما فى ١٩٦)

أعنى أن اللوغاريتمات يختلف بعضها عن بعض فى العــدد البيانى فقط أما الاجزاء الاعشارية فهى متحدة

والاعداد البيانية من لوغاريتمات الاعداد السابقة هى على التوالى ١ و ٢ و ٣ و — ١ و — ٢ و — ٣ و — ٤

٢٠٢ تقـــدم أن لوغاريتم خارج القســـمة يساوى لوغاريتم المقسوم ناقصا لوغاريتم المقسوم عليـه فاذا كان المقسوم أقل من المقسوم عليه كان لوغاريتم خارج القسمة سالبا

وكل لوغاريتم سالب يمكن تحويله الى لوغاريتم يكون عدده البيانى سالبا والجزء الاعشارى موجبا ويكتفى فى هـذا أن يضم اليه واحد ويطرح منه واحد

مثـلا لتحويل اللوغاريتم — ٣٫٦٩٨٩٧ الذى كله سالب الى لوغاريتم يكون عدده البيانى فقط هو السالب نجرى العمل هكذا

— ٣٫٦٩٨٩٧ = — ٠٫٦٩٨٩٧ — ٣ = — ٠٫٦٩٨٩٧ + ١
— ٣ — ١ = ٠٫٣٠١٠٣ — ٤ = ٤̄٫٣٠١٠٣

ومما ذكر تستنتج القاعدة الآتية

قاعدة ـ لتحويل لوغاريتم سالب الى لوغاريتم يكون جزؤه الاعشارى موجبا وعدده البيانى سالبا يكفى أن يطرح الجزء الاعشارى من واحد صحيح ويزاد العدد البيانى واحدا ويعتبر العدد البيانى سالبا

٢٠٣ قد عملت جداول للوغاريتمات أساسها ١٠ ذات ســبعة أرقام اعشارية وذات خمســة أرقام اعشارية وأربعــة أرقام من ١ الى ١٠٠٠٠ انما لم يكتب فى تلك الجـداول الاعداد البيانيـة وقد اكتفى بكتابة الجزء الاعشارى فقط وبموجب ماتقـدم من القواعد يمكن الاستدلال على مقدار العدد البيانى سواء كان موجبا أو سالبا

ومما ينبغى ملاحظته هو أن الجداول المذكورة لاتشتمل الا على أجزاء اعشارية موجبة اذ تقدم ان اللوغاريتمات السالبة يمكن تحويلها الى لوغاريتمات أجزائها الاعشارية موجبة واعدادها البيانية سالبة

ولكل جدول من الجداول المذكورة طريقة فى استعماله فيجب عند استعمال جدول منها ارشاد الطلبة الى كيفية استعماله

وقد بينا كيفية استعمال الجدول اللوغاريتمى ذى الخمسة أرقام الاعشارية فى كتابنا (الدرر البهية فى الاصول الحسابية)

٢٠٤ تغيير قاعدة اللوغاريتم (العدد الثابت الذى يرفع الى قوة) لتحويل لوغاريتم عدد من قاعدة مثل ح الى قاعدة أخرى مثل ب نفرض أن العدد هو ن وأن لوغاريتمه بالنسبة لقاعدة ح معلوم ونفرض أن لوغاريتمه بالنسبة لقاعدة ب هو س فيكون

$\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{ن} = \text{س}$ أى $\text{ن} = \text{ب}^{\text{س}}$ ويأخذ لوغاريتمى الطرفين بالنسبة للقاعدة المعلومة ح يكون

$$\text{لو}_{\text{ح}}\ \text{ن} = \text{س}\ \text{لو}_{\text{ح}}\ \text{ب}$$ وحينئذ يكون

$$\text{س} = \text{لو}_{\text{ح}}\ \text{ن} \times \frac{1}{\text{لو}_{\text{ح}}\ \text{ب}} \qquad (1)$$

أعنى أن لوغاريتم العدد ن بالنسبة لقاعدة ب يساوى لوغاريتمه بالنسبة لقاعدة ح مضروبا فى عكس لوغاريتم القاعدة ب نفسها بالنسبة لقاعدة ح

تنبيه ـ اذا وضع فى المعادلة (١) العدد ح بدلا عن ن وبدلا عن س ماساواه ينتج

$$لو_{ب}ح = لو_{ح}ح \times \frac{1}{لو_{ح}ن} = \frac{1}{لو_{ح}ب} \quad (١٩٤)$$

وحينئذ يكون $لو_{ب}ح \times لو_{ح}ب = ١$

تمـــرين ٥٢

(١) اذا علم أن لوغاريتم ٥ = ٠٫٦٩٨٩٧ ولوغاريتم ٧ = ٠٫٨٤٥١٠ ولو ١٣ = ١٫١١٣٩٤ فما يكون لوغاريتم ٣٥ ولوغاريتم ٩١

(٢) اذا علم أن لوغاريتم ٣ = ٠٫٤٧٧١٢ ولو ٥١ = ١٫٧٠٧٥٧ ولو ١١١ = ٢٫٠٤٥٣٢ فما يكون لوغاريتم ١٧ ولوغاريتم ٣٧

(٣) اذا علم أن لوغاريتم ٥ = ٠٫٦٩٨٩٧ فما يكون لوغاريتم ٢٥ و١٢٥ و٦٢٥

(٤) اذا علم ان لوغاريتم ٢ = ٠٫٣٠١٠٣ فما يكون لوغاريتم ٨ و١٦ و٦٤

(٥) اذا علم أن لوغاريتم ٦٤ = ١٫٨٠٦١٨ فما يكون لوغاريتم ٨ ولوغاريتم ٤

(٦) اذا علم أن لوغاريتم ٢ = ٠٫٣٠١٠٣ ولوغاريتم ٦ = ٠٫٧٧٨١٥ فما يكون لوغاريتم ٩ ولوغاريتم ١٨

(٧) اذا علم أن لوغاريتم ١٠٥ = ٢٫٠٢١١٩ فما يكون لو ١٠٥٠ ولو ١٫٠٥ ولو ٠٫٠٠١٠٥

(٨) مامقدار العدد البيانى من لوغاريتمات الاعداد ٨٧٥٠٢ و $\bar{٥}$٫٤٦٧ و ٣٫٨١٢

(٩) مامقدار العدد البيانى من لوغاريتمات الاعداد ٠٫١٦٨٢ و ٠٫٠٠٠٢٤ و ٠٫٠٠٥

(١٠) حول اللوغاريتمات الآتية الى لوغاريتمات مكافئة لها ذات أجزاء اعشارية موجبـــة

— ١٫٦٩٨٩٧ و — ٠٫٣٠١٠٣ و — ٢٫٨٥٤١٨

المعادلات ذات الدرجة الثانية

٢٠٥ تعريف ـ المعادلة ذات الدرجة الثانية والمجهول الواحد هي معادلة محتوية على مجهول واحد وأعظم أس له فيها اثنان

مثل ٥ سـ^{٢} + ٢ سـ = ٩٢

واذا وجد المجهول فى مقام أو تحت علامة جذر يلزم حذفه من المقام أو ازالة الجذر بالطرق السابقة

ففى المعادلة $\frac{٨}{سـ}$ + سـ = ٦ يلزم حذف المقام فتؤول الى ٨ + سـ^{٢} = ٦ سـ فهى من الدرجة الثانية

وفى المعادلة ٧ $\sqrt{سـ}$ + ٣ سـ = ١٤ يلزم ازالة الجذر فتؤول الى ٩ سـ^{٢} − ٨٥ سـ = − ١٩٦ وهى من الدرجة الثانية أيضا ولا يحكم على درجة المعادلة الا اذا كانت صحيحة وجذرية بالنسبة لمجهولها

٢٠٦ الصورة العمومية لمعادلة الدرجة الثانية ـ كل معادلة ذات درجة ثانية ومجهول واحد يمكن أن تؤول الى هذه الصورة

$$حـ\ سـ^{٢} + ء\ سـ + هـ = ٠$$

لأنه يمكن اختصار الحدود المشتملة على سـ^{٢} الى حد واحد وكذا الحدود المشتملة على سـ ثم اعتبار الكمية المعلومة كحد واحد وحينئذ فكل من الكميات حـ , ء , هـ الداخلة فى المعادلة العمومية السابقة

اما أن يكون حدا واحدا أو كميـــة كثيرة الحدود موجبة أو سالبـــة وقد يكون بعضها معدوما

٢٠٧ أنواع معادلة الدرجة الثانيـــة ـ معادلة الدرجة الثانية نوعان تامة وغير تامة فالتامة هى المشـتملة على المجهول بدرجة ثانيـــة وبدرجة أولى وعلى كمية معلومة

مثل ح س^{٢} + ء س + هـ = ٠

وغير التامة هى اما أن تشتمل على المجهول بدرجة ثانية وعلى كمية معلومة فقط واما أن تشتمل على المجهول بدرجة ثانيـــة وبدرجة أولى كذلك

مثل س^{٢} − هـ = ٠ ، س − ء س = ٠

حل معادلات الدرجة الثانية غير التامة

٢٠٨ أولا لحـــل المعادلة

س^{٢} + هـ = ٠ نحول هـ الى الطرف الثـانى ثم نأخذ جذر الطرفين فيحدث س = ± $\sqrt{\text{− هـ}}$ أى أن للمعادلة جذرين فاذا كان هـ سالبا يكون − هـ موجبا ويكون الجذران حقيقيين واذا كان هـ موجبا يكون − هـ سالبا ويكون الجذران تخيليين

مثلا فى المعادلة ٣ س^{٢} − ٧٥ = ٠

يكون س = ± $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥ أى أن للمجهول س مقدارين حقيقيين فاذا رمز لهما بحرفى سَ ، سً ينتـــج سَ = ٥ ، سً = − ٥ وكل منهما يحقق المعادلة

وفى المعادلة $٣س^{٢} + ٧٥ = ٠$ يكون $س = \pm \sqrt{-٢٥} = \pm ٥\sqrt{-١}$ أى أن للمجهول مقدارين تخيليين

٢٠٩ ثانيا لحل المعادلة $س^{٢} - ى س = ٠$ نأخذ س مضروبا مشتركا فيحدث $س(س - ى) = ٠$ وحيث ان حاصل ضرب س فى $(س - ى)$ يساوى صفرا فيلزم أن يكون أحد العاملين أو كلاهما صفرا

فاذا فرض أن $س = ٠$ يرى أن مقدار س هو صفر وبه تتحقق المعادلة

واذا فرض أن $س - ى = ٠$ فيكون $س = ى$ وهو أيضا يحقق المعادلة وحينئذ فيكون للمعادلة جذران فاذا رمز لهما بحرف $س'$ ، $س''$ ينتج $س' = ٠$ ، $س'' = ى$

مثلا فى المعادلة $٣س^{٢} - ١٥س = ٠$ يكون

$س(٣س - ١٥) = ٠$ ومنها يكون $س' = ٠$ ، $س'' = ٥$

تمرين ٥٣

المطلوب حل المعادلات الآتية

(١) $٤س^{٢} - ٦٤ = ٠$

(٢) $٥س^{٢} - ٦٣ = -٢س^{٢}$

(٣) $٨١ - ٤س^{٢} = ١٧$

(٤) $٧(س^{٢} - ١) = ١٦٨$

(٥) $\frac{س+١}{س-١} + \frac{س-١}{س+١} = \frac{١٣}{٦}$

(٦) $\frac{٣٣}{س^{٢}+٢} - \frac{٢١}{س^{٢}-٢} = ٠$

(٧) $\frac{س^{٢}-١}{٣س} = \frac{س}{٤}$

(٨) $\frac{٢س+٧}{س+١} = \frac{س-١}{٢س-٧}$

(٩) $٣س(س - ١) = ٠$

(١٠) $٥س^{٢} - ٦٠س = ٠$

(١١) $\frac{س^{٢}}{٢} = ٢س$

(١٢) $\frac{س^{٢}}{١٢} = \frac{س}{٢}$

(١٣) $(\text{س} + \frac{\text{س}}{٣})\text{س} = ٤\,\text{س}$

(١٤) $(٢\,\text{س} + \frac{\text{س}}{٤})\text{س} - ٢\,\text{س} = ٧\,\text{س}$

(١٥) $٧\,\text{ح}\,(\text{س}^{٢} + \text{د}) = \text{و}$

(١٦) $\text{ح}\,\text{س}^{٢} - ٢\,\text{ح} = ٠$

(١٧) $\frac{\text{ح}\,\text{س}}{\text{ح}+\text{د}} = \frac{\text{ب}}{\text{س}}$

(١٨) $\frac{\text{س}}{\text{ح}+\text{ب}} = \frac{\text{ح}-\text{ب}}{\text{د}^{٢}\,\text{س}}$

(١٩) $\text{س}\,(\text{س} - \text{د}) = ٠$

(٢٠) $\text{س}\,(١ - ٢\,\text{س}) = - \text{س}^{٢}$

حل مسائل بمعادلات الدرجة الثانية غير التامة

٢١٠ ولنذكر هنا مسائل ترجع الى معادلات الدرجة الثانيـة غير التامة مع حلها فنقول

المسـئلة الاولى ـ ماهو العدد الذى اذا طرح خمسة من خمس مربعة ينتج ٤٠

الحل نفرض العدد س وعلى حسب منطوق المسئلة تحدث المعادلة

$\frac{\text{س}^{٢}}{٥} - ٥ = ٤٠$ وبحلها يوجد

$\text{س} = \pm ١٥$ والتحقيق واضح

المسئلة الثانية ـ رجل عمره خمسة أمثال عمر ابنه ومجموع مربعى عمريهما ١٢٧٤ فما عمر كل منهما

الحل نفرض أن عمر الابن س فيكون عمر الأب ٥ س وعلى حسب منطوق المسئلة توجد المعادلة

$\text{س}^{٢} + ٢٥\,\text{س}^{٢} = ١٢٧٤$ وبحلها يحدث

$\text{س} = \pm ٧$

أعنى أن عمر الابن ٧ سنوات ويكون عمر الأب ٣٥ سنة
أما المقدار السالب فلا يوافق المسئلة

المسئلة الثالثة ـ ماهو العدد الذى اذا ضرب ثلثه فى خمسة أثمانه كان الناتج مساويا لعشرة أمثاله

الحل نفرض أن العدد س فيكون ثلثه $\frac{س}{٣}$ وخمسة أثمانه $\frac{٥ س}{٨}$ وعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$$\frac{س}{٣} \times \frac{٥ س}{٨} = ١٠ \text{ س أو}$$

$$٥ س^٢ = ٢٤٠ \text{ س أو}$$

$$س^٢ = ٤٨ \text{ س أى}$$

$س^٢ - ٤٨ س = ٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$$س = ٠ \text{ و } س'' = ٤٨$$

المسئلة الرابعة ـ ماهو العدد الذى نسبة مربعه الى ٦ كنسبته الى نصف

الحل نفرض أن العدد س فعلى حسب المنطوق تحدث المعادلة

$\frac{س^٢}{٦} = \frac{س}{٠٫٥}$ ومنها يكون $س^٢ = ١٢$ س أى

$س^٢ - ١٢ س = ٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$س' = ٠$ و $س'' = ١٢$ أعنى أن العدد المطلوب هو ١٢

تمرين ٥٤

(١) ماهو العدد الذى اذا ضرب ثلثه فى ربعه ينتج ١٠٨

(٢) ماهو العدد الذى نسبته الى ١٨ كنسبة الواحد الى نصف ذلك العدد

(٣) قطعة أرض مربعة الشكل اذا أضيف لها ١٫٧٩ متر مربع تصير فدانا فما ضلعها بالمتر

(٤) ماهو العدد الذى اذا أضيف عشرة الى مربعه ينتج واحد

(٥) قطعة من الحرير ثمنها $\frac{ف}{٣٢٠}$ وثمن المتر منها يعادل خمس عدد الامتار الدالة على طولها فما ثمن المتر وما مقدار طولها

(٦) ماهو العدد الذى نسبة مربعه الى ثمانية كنسبة ثلاثة أمثاله الى اثنين

(٧) مامقدار طول ضلع الزاوية القائمة فى مثلث قائم الزاوية بعد معرفة أن الضلع الثانى ينقص من هذا الضلع مترا واحدا وأن الوتر يزيد عنه مترا واحدا

(٨) سئل شخص من مقدار سنه فقال انه اذا ضرب ثلثا عمره فى خمسه كان الناتج مساويا لاربعة أمثاله فما مقدار سنه

(٩) ماهو العدد الذى ثلاثة أمثال مربعه يساوى تسعة أمثاله

(١٠) ماهو العدد الذى اذا ضرب فى الفرق بينه وبين ١٢ كان الناتج مساويا لثلث مربعة

حل معادلات الدرجة الثانية التامة

٢١١ تحل معادلات الدرجة الثانية التامة باحدى الطريقتين الآتيتين الاولى بواسطة التحليل الى عوامل والثانية بواسطة اتمام المربع

حل المعادلة ذات الدرجة الثانية التامة بواسطة التحليل الى عوامل

٢١٢ لحل معادلة ذات درجة ثانية تامة بواسطة التحليل الى عوامل نحول جميع حدود المعادلة الى طرف واحد فيؤول الطرف الثانى الى صفر ثم نحلل الطـرف الاول الى عاملين ونفرض على التوالى أن كل واحد منهما يساوى صفرا فبذلك تنتج معادلتان بدرجة أولى كل منهما تشتمل على المجهول فبحل هاتين المعـادلتين ينتج من كل منهما مقـــدار المجهول

ولنأت لذلك بأمثلة فنقول

(مثال ١) لحل المعادلة $س^٢ + ٥ س = ٢٤$ نحول ٢٤ الى الطرف الاول فينتج

$س^٢ + ٥ س - ٢٤ = ٠$ نحلل الطـرف الاول الى عامل فينتج

$(س - ٣)(س + ٨) = ٠$ وحيث ان حاصل الضرب يساوى صفرا فيـلزم أن يكون أحد العاملين أوكلاهما صـفرا فاذا جعل

$س - ٣ = ٠$ يكون $س = ٣$ وهوحل للمعادلة

واذا جعل $س + ٨ = ٠$ يكون $س = - ٨$ وهوحل أيضا للمعـادلة

وحينئذ يكون $س = ٣$ أو $- ٨$

ومن المعتاد أن يرمز لمقـداري المجهول بحرفي س′ و س″ ويكتب س′ = ٣ , س″ = − ٨

(مثال ٢) لحل المعادلة ٣ س^{٢} + ٢ س = ٨٥ نحول ٨٥ للطرف الاول فينتج

٣ س^{٢} + ٢ س − ٨٥ = ٠ نحلل الطرف الاول الى عاملين فينتج

(س − ٥) (٣ س + ١٧) = ٠

وحيث ان حاصل الضرب صفر فيكون أحد العاملين صفرا فاذا فرض أن س − ٥ = ٠ يكون س = ٥

واذا فرض ٣ س + ١٧ = ٠ يكون س = − $\frac{٢}{٣}$ ٥

أعني أن مقدار المجهول س هو ٥ أو − $\frac{٢}{٣}$ ٥ واذا رمز لمقداري المجهول بحرف س′ و س″ يكون س′ = ٥ , س″ = − $\frac{٢}{٣}$ ٥

(مثال ٣) لحل المعادلة $\frac{٥ س − ٧}{٧ س − ٥}$ = $\frac{س − ٥}{٢ س − ١٣}$ نحذف المقامين فيحدث

(٥ س − ٧) (٢ س − ١٣) = (س − ٥) (٧ س − ٥)

وباجراء الضرب والاختصار ينتج

٣ س^{٢} − ٣٩ س + ٦٦ = ٠ نحلل الطرف الاول الى عاملين فينتج

(٣ س − ٦) (س − ١١) = ٠ ثم نفرض أن كل عامل منهما يساوي صفرا فاذا فرض أن ٣ س − ٦ = ٠ يكون س = ٢

واذا فرض أن س − ١١ = ٠ يكون س = ١١ وكلاهما يحقق المعادلة أعنى أن س = ٢ أو ١١ واذا رمز لمقدارى المجهول بحرفى س′ و س″ يكون س′ = ٢ , س″ = ١١

تمـــرين ٥٥

المطلوب حل المعادلات الآتية

(١) س^٢ − ١١ س + ٣٠ = ٠
(٢) س^٢ − ٣ س − ١٠٨ = ٠
(٣) س^٢ − ٢٤ س + ٩٥ = ٠
(٤) س^٢ + س − ٤٢ = ٠
(٥) س^٢ + ٢٣ س + ١٠٢ = ٠
(٦) س^٢ − ٢١ س + ٨٠ = ٠
(٧) س^٢ + ٧ س − ٧٨ = ٠
(٨) س^٢ − ٢١ س + ١١٠ = ٠
(٩) س^٢ − س − ٩٠ = ٠
(١٠) س^٢ + ٢ س + ١ = ٠
(١١) س^٢ − ١٩ س + ٨٤ = ٠
(١٢) س^٢ + ٤ س − ١٦٥ = ٠
(١٣) ٣ س^٢ − ١١ س + ٦ = ٠
(١٤) ٣ س^٢ − س − ٢ = ٠
(١٥) ٣ س^٢ + ٨ س + ٤ = ٠
(١٦) ٢ س^٢ − ١٥ س + ٢٨ = ٠
(١٧) ٢ س^٢ − س − ١٥ = ٠
(١٨) ٣ س^٢ − ٤١ س + ٢٦ = ٠
(١٩) ٨ س^٢ − ٦ س − ٢٠ = ٠
(٢٠) ١٥ س^٢ + ٧٧ س + ١٠ = ٠
(٢١) ٧٢ س^٢ − ١٤٥ س + ٧٢ = ٠
(٢٢) ٤ س^٢ + ١١ س − ٣ = ٠
(٢٣) ٢ س^٢ − ٩ س + ٤ = ٠
(٢٤) ٥ س^٢ − ٩ س − ٢ = ٠
(٢٥) ٦ س^٢ + ١١ س + ٣ = ٠
(٢٦) (٣ س − ١) / (٤ س + ٧) = ١ − ٦ / (س + ٧)
(٢٧) (س + ٣) / (٢ س − ٧) = (٢ س − ١) / (س − ٣)
(٢٨) ١ / (٣ − س) − ١ / (٩ − ٢ س) = ٤ / ٥
(٢٩) (س + ٤) / (س − ٤) + (س − ٢) / (س − ٣) = ١٩ / ٣
(٣٠) ٥ / (س − ٢) − ٤ / س = ٣ / (س + ٦)
(٣١) √(س + ٦) = ٣ (س − ٢)
(٣٢) س − √س = ٢٠
(٣٣) √(س + ١١) + √(٢ س − ٩) = ٥
(٣٤) س + ٣ √س = ١٨

مسائل على معادلات الدرجة الثانية التامة محلولة بطريق التحليل

٢١٣ ولنذكر مسائل تحل بمعادلات الدرجة الثانية التامة بطريق التحليل فنقول

المسألة الاولى ــ جمعية مكوّنة من عشرين شخصا رجالا وأولادا تبرعوا بمبلغ ٤٨٠ قرشا لجمعية خيرية فكان نصف هذا المبلغ من الرجال والنصف من الأولاد فاذا علم ان مادفعه كل رجل يزيد عما دفعه كل ولد ١٠ قروش فكم عدد الرجال وكم عدد الأولاد

الحل نرمز لعدد الرجال بحرف س فيكون عدد الاولاد ٢٠ ــ س ويكون مادفعه كل رجل هو $\frac{٢٤٠}{س}$ ومادفعه كل ولد هو $\frac{٢٤٠}{٢٠ - س}$ وحيث ان مادفعه الرجل يزيد عما دفعه الولد ١٠ قروش فتحدث المعادلة

$\frac{٢٤٠}{س} = \frac{٢٤٠}{٢٠ - س} + ١٠$ وبحذف المقامين والاختصار ينتج

$س^٢ - ٦٨ س + ٤٨٠ = ٠$ نحلل الطرف الاول الى مضروبين ينتج

$(س - ٨)(س - ٦٠) = ٠$

وحينئذ يكون س $=$ ٨ أو ٦٠ والمقدار الاول هو الموافق للمسألة وعليه يكون عدد الرجال ٨ وعدد الأولاد ١٢

ومن الواضح أن المقدار الثانى ٦٠ لايوافق المسألة لأن المتبرعين كلهم عشرون شخصا

المسألة الثانيـة ـ ماهو العدد الذى اذا أضـيف الى مربعه كان الناتج مساويا الى تسعة أمثال العدد التالى له

الحـل نفرض أن العدد س فيكون العدد التالى له $\text{س} + ١$ وبناء على منطوق المسألة تحدث المعادلة

$\text{س}^{٢} + \text{س} = ٩ (\text{س} + ١)$ وبحذف الاقواس والاختصار ينتـــج

$\text{س}^{٢} - ٨ \text{س} - ٩ = ٠$ نحلل الطرف الاولى الى عاملين فينتج

$$(\text{س} - ٩)(\text{س} + ١) = ٠$$

ومن هنا يستلتج أن $\text{س} = ٩$ أو $- ١$ وكلاهما يحقق المسألة

المسألة الثالثة ـ ماهو العدد الذى اذا أضيف اليه جذره التربيعى كان الناتج مساويا الى ١٢

الحـل نفرض أن العدد س فيكون جذره التربيعى $\sqrt{\text{س}}$ وبناء على منطوق المسألة تحدث المعادلة

$\text{س} + \sqrt{\text{س}} = ١٢$ وبازالة الجذر ينتج

$\text{س} - ٢٥ \text{س} + ١٤٤ = ٠$ نحلل الطرف الاول الى عاملين فيلتـــج

$$(\text{س} - ١٦)(\text{س} - ٩) = ٠$$

ومن هنا يستنتج أن $\text{س} = ١٦$ أو ٩

وكلاهما يحقق المسألة اذ بملاحظة أن $\sqrt{١٦}$ = ± ٤ واعتبار أن ٤ هو جذر ١٦ يكون ١٦ + (– ٤) = ١٢ وبملاحظـة أن $\sqrt{٩}$ = ± ٣ واعتبار أن ٣ هو جذر ٩ يكون ٩ + ٣ = ١٢

تمـــرين ٥٦

(١) استاجر اخوة عربة بمبلغ ٦٠ مليما وعند الشروع فى الركوب حضر اثنان من أصحابهم فركبوا معهم ووزعت الاجرة عليهم جميعا و بذلك نقص ما كان يدفعه كل واحد من الاخوة ثمانية ملليمات فكم عدد الاخوة

(٢) رجل يمكنه أن يقطع ١٠٨ أميال فى مدة معينة ووجد أنه يمكنه أن يوفر من تلك المدة ٤,٥ ساعات اذا زاد على سرعته ميلين فى الساعة فما سرعته الاصلية

(٣) ماهو العدد الذى اذا طرح من مربعه ١٣٩ كان الباقى مساويا الى عشرة أمثال زيادة ذلك العدد عن اثنين

(٤) صبى اشترى بيضا بثلاثة قروش فكسر ٣ بيضات فى الطريق و بذلك ارتفع ثمن كل ثلاث بيضات مليما عن ثمن السوق فكم بيضة اشتراها

(٥) أراد محسن أن يتصـــدق بمبلغ ٣٠ على جملة فقراء و بعـــد تعيين نصيب كل منهم حضر ثلاثة فقراء آخرون فأدخلهم فى التقسيم وبهذه الواسطة نقص ما كان خصصه لكل واحد ٥ فكم عدد الفقراء الاول

(٦) مجموع عكسى عددين متواليين هو $\frac{١٣}{٤٢}$ فما هما العددان

(٧) بلغت مصاريف قضية بين أشخاص متضامنين ١٠٠ جنيه فألزموا بدفع هذا المبلغ ولعسر ثلاثة منهم دفع كل من الباقين ٧,٥ جنيهات زيادة عما كان يلزم أن يدفعه فما عدد المتضامنين

(٨) شخص وضع ١٥٠٠٠ جنيه فى تجارة مدة سنة ثم أخذ ماوضعه وأرباحه ووضعه فى تجارة أخرى مدة سنة ربحت ٩٤٥ جنيها وقدعلم أن ربحه فى هذه السنة يزيد واحدا فى المائة عن ربح السنة الاولى فكم كان ربح المائة فى أول السنة

(٩) ماهو العدد الذى اذا زيد عليه ١٧ كان الناتج قدر معكوس هذا العدد ٦٠ مرة

(١٠) حجرة يمكن تبليطها بمقـدار ٢٠٠ بلاطة مربعـة الشـكل ويمكن تبليطها بمقدار ١٢٨ بلاطة مربعة الشـكل من بلاط آخر ضلع كل منها يزيد بوصة واحدة عن ضلع النوع الاول فما ضلع البلاطة فى الحالة الاولى

حل المعادلة ذات الدرجة الثانيـــة التامة بطريقـــة اتمـام المربع

٢١٤ للمعادلة التامة ذات الدرجة الثانية صورتان

الاولى أن يكون مكرر المجهول بدرجة ثانية الواحد

الثانية أن يكون مكرره غير الواحد

٢١٥ الصورة الاولى

$س^2 + د س + هـ = 0$ ولحلها بطريقة اتمام المربع نحول هـ الى الطرف الثـانى فينتج

$$س^2 + د س = - هـ$$

وبالتأمل للطرف الاول نجـد أنه مشتمل على حدّين من مربع كمية ذات حدّين فيـه $س^2$ مربع الحد الاول و د س ضعف الاول فى الثانى فاذن يكون الثانى $\frac{د}{2}$ فاذا أضيف للطرفين مربعه أى $\frac{د^2}{4}$

ينتج $$س^2 + د س + \frac{د^2}{4} = \frac{د^2}{4} - هـ$$

ويكون الطرف الاول مربع الكميـة $س + \frac{د}{2}$ فاذا استعيض بهـا ينتج

$$\left(\text{س} + \frac{\text{ك}}{٢}\right)^{٢} = \frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \text{هـ}$$ وبأخذ جذر الطرفين ينتج

$$\text{س} + \frac{\text{ك}}{٢} = \pm \sqrt{\frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \text{هـ}}$$ أو

$$\text{س} = - \frac{\text{ك}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \text{هـ}} \qquad (١)$$

وهذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانيــة فى الحالة التى يكون مكرره الواحد وينطق به هكذا

مقدار المجهول بدرجة ثانية (فى الحالة التى يكون مكرره فيها الواحد) يساوى نصف مكرر المجهول بدرجة أولى بعـــد تغيير اشارته زائدا أوناقصا الجذر التربيعى للكمية الناتجة من مربع هــذا النصف مضافا اليه الكمية المعلومة بعد تغيير اشارتها

وحيث ان للجذر فى قانون (١) اشارتين فيكون للمجهول س مقداران فاذا رمز لهما بحرفى سَ و سً يكون

$$\text{سَ} = - \frac{\text{ك}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \text{هـ}} \text{ و } \text{سً} = - \frac{\text{ك}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ك}^{٢}}{٤} - \text{هـ}}$$

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$$\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٢٨ = ٠$$ ينتج أن

$$\text{س} = - ١{,}٥ \pm \sqrt{١{,}٥^{٢} + ٢٨}$$ أى

$$\text{س} = - ١{,}٥ \pm ٥{,}٥$$

واذا رمز لمقدارى المجهول بحرفى سَ و سً ينتج

$$\text{سَ} = - ١{,}٥ + ٥{,}٥ = ٤$$ و

$$\text{سً} = - ١{,}٥ - ٥{,}٥ = - ٧$$

٢١٦ الصورة الثانية

$\text{ح}\,\text{س}^{٢} + \text{ء}\,\text{س} + \text{هـ} = ٠$ ولحلهـا نقسم حدودها على ح فيحـــدث

$\text{س}^{٢} + \frac{\text{ء}}{\text{ح}}\,\text{س} + \frac{\text{هـ}}{\text{ح}} = ٠$ وبتطبيق القانون السابق على هذه المعادلة ينتج

$\text{س} = -\frac{\text{ء}}{٢\,\text{ح}} \pm \sqrt{\frac{\text{ء}^{٢}}{٤\,\text{ح}^{٢}} - \frac{\text{هـ}}{\text{ح}}}$ وباجراء عمليـة الطرح فيما تحت الجذر ينتج

$\text{س} = -\frac{\text{ء}}{٢\,\text{ح}} \pm \sqrt{\frac{\text{ء}^{٢} - ٤\,\text{ح}\,\text{هـ}}{٤\,\text{ح}^{٢}}}$ وباخراج المقام من تحت علامة الجذر ينتج

$$\text{س} = \frac{-\text{ء} \pm \sqrt{\text{ء}^{٢} - ٤\,\text{ح}\,\text{هـ}}}{٢\,\text{ح}} \qquad (٢)$$

وهــذا هو القانون العام لمقدار المجهول بدرجة ثانية فى حالة ماإذا كان مكرره غير الواحد وينطق به هكذا

مقـــدار المجهول بدرجة ثانية (فى الحالة التى يكون مكرره فيهاغير الواحد) يساوى كسرا اعتياديا بسطه مكرر المجهول بدرجة أولى بعــد تغيير اشارته زائدا أو ناقصا الجــذر التربيعى للكمية الناتجــة من مربع هذا المكرر مضافا اليه أربعة أمثال حاصل ضرب مكرر المجهول بدرجة ثانية فى الكمية المعلومة بعد تغيير اشارتها ومقامه ضعف مكرر المجهول بدرجة ثانيـــة

وبتطبيق هذا القانون على حل المعادلة

$$\text{٥ سـ}^{\text{٢}} + \text{٣ سـ} - \text{٩٢} = \text{٠}$$ ينتـــج

$$\text{سـ} = \frac{-\text{٣} \pm \sqrt{\text{٩} + \text{٤} \times \text{٥} \times \text{٩٢}}}{\text{٢} \times \text{٥}}$$ أى

$$\text{سـ} = \frac{-\text{٣} \pm \text{٤٣}}{\text{١٠}}$$ واذا رمز لمقـــدارى المجهول بحرفى سـَ و سـً ينتج $\text{سـَ} = \frac{\text{٤٠}}{\text{١٠}} = \text{٤}$ و $\text{سـً} = -\frac{\text{٤٦}}{\text{١٠}} = -\text{٤,٦}$

٢١٧ حالة خصوصـــية ـ اذا كان مكرر المجهول بدرجة أولى زوجيا كما فى المعادلة $\text{حـ سـ} + \text{٢ ءَ سـ} + \text{هـ} = \text{٠}$

التى فيها ٢ ء بدلا عن ء فى السابقـــة فانه يمكن اختصار القانون السابق اذ بتطبيقه على هذه المعادلة ينتج أن

$$\text{سـ} = \frac{-\text{٢ ءَ} \pm \sqrt{\text{٤ ءَ}^{\text{٢}} - \text{٤ حـ هـ}}}{\text{٢ حـ}}$$

وبأخذ ٤ مضروبا مشتركا فيما تحت الجذر واخراجة ينتج

$$\text{سـ} = \frac{-\text{٢ ءَ} \pm \text{٢} \sqrt{\text{ءَ}^{\text{٢}} - \text{حـ هـ}}}{\text{٢ حـ}}$$

وبقسمة حدى الكسر على ٢ ينتج

$$\text{سـ} = \frac{-\text{ءَ} \pm \sqrt{\text{ءَ}^{\text{٢}} - \text{حـ هـ}}}{\text{حـ}} \qquad \text{(٣)}$$

وهو قانون لمعادلة الدرجة الثانيـة فى هذه الحالة المخصوصة وعلى الطالب أن ينطق بهذا القانون قياسا على القانونين السابقين لتمرينه على التعبير اللفظى عن القوانين الجبرية

وبتطبيق هذا القانون على المعادلة $٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ١٥ = ٠$ ينتج

$$\text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٣ \times ١٥}}{٣} \quad \text{او}$$

$$\text{س} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤٩}}{٣} \quad \text{ومنه}$$

$$\text{س}' = \frac{٢+٧}{٣} = ٣ \;,\; \text{س}'' = \frac{٢-٧}{٣} = -\,١\tfrac{٢}{٣}$$

٢١٨ تنبيه — يمكن أن يكتفى فى الصورة الثانية (٢١٦و٢١٧) بقسمة حدود المعادلة على مكرر المجهول بدرجة ثانية وتطبيق القانون الاول السابق بنمرة ٢١٥

مثلا لحل المعادلة

$٥\,\text{س}^{٢} + ٣\,\text{س} - ٩٢ = ٠$ نقسم حدودهـا على ٥ فينتج

$\text{س}^{٢} + ٠٫٦\,\text{س} - ١٨٫٤ = ٠$ وبتطبيق قانون (١) عليها ينتج

$\text{س} = -\,٠٫٣ \pm \sqrt{٠٫٣^{٢} + ١٨٫٤}$ ومن هنـا يؤخذ أن

$\text{س}' = ٤ \;,\; \text{س}'' = -\,٤٫٦$ وهو عين ماتقدم بنمرة ٢٠٠

ولحل المعادلة $٣\,\text{س}^{٢} - ٤\,\text{س} - ١٥ = ٠$ نقسم حدودها على ٣ فينتج

$\text{س}^{٢} - \frac{٤}{٣}\,\text{س} - ٥ = ٠$ وبتطبيق قانون (١) عليها ينتج

س = $\frac{٢}{٣}$ ± $\sqrt{\frac{٤}{٩} + ٥}$ ومن هنا يؤخذ أن

س' = ٣ , س'' = — ١ $\frac{٢}{٣}$ وهو عين ماتقدم بنمرة ٢١٧

ويستنتج من هذا أنه يمكن اعتبار الصورة الاولى لمعادلة الدرجة الثانية التامة صورة عمومية وهى الصورة المعتادة والاكثر استعمالا

٢١٩ تنبيه — يلاحظ عند تطبيق القوانين السابقة على معادلات الدرجة الثانية أن تكون اشارة المجهول بدرجة ثانية موجبة فان كانت سالبة لزم تغيير جميع اشارات المعادلة

تمرين ٥٧

المطلوب حل المعادلات الآتية

(١) س^{٢} — ١٠ س + ٩ = ٠
(٢) س^{٢} — ٩ س + ١٤ = ٠
(٣) س^{٢} — ١١ س + ٢٤ = ٠
(٤) س^{٢} — ١٠ س + ٢٤ = ٠
(٥) س^{٢} — س — ٢٠ = ٠
(٦) س^{٢} + ٦ س — ٧٢ = ٠
(٧) س^{٢} + ٢ س — ٣٥ = ٠
(٨) س^{٢} + ٧ س — ٨ = ٠
(٩) س^{٢} + ١٢ س + ٢٧ = ٠
(١٠) س^{٢} + ١٢ س + ٢٠ = ٠
(١١) ٣ س^{٢} — ٥ س — ٢ = ٠
(١٢) ٥ س^{٢} + ٣ س — ٥٤ = ٠
(١٣) ٨ س^{٢} — ١٧ س — ١١٥ = ٠
(١٤) ٦ س^{٢} — س — ١ = ٠
(١٥) ٩ س^{٢} + ٥ س — ١٤ = ٠
(١٦) ١١ س^{٢} + ٢ س — ٤٨ = ٠
(١٧) ٧ س^{٢} — ٤ س — ٥١ = ٠
(١٨) ٥ س^{٢} + ٦ س — ١٠٤ = ٠
(١٩) ٣ س^{٢} — ١٨ س + ١٥ = ٠
(٢٠) ٩ س^{٢} + ١٠ س — ٣،٠٤ = ٠
(٢١) س^{٢} — $\frac{٥}{٦}$ س + $\frac{١}{٦}$ = ٠

(٢٢) $\frac{٣}{٤}\text{س}^{٢} - \frac{١}{٣}\text{س} - ٢٥ = ٠$

(٢٣) $\frac{٥\text{س}+٧}{\text{س}-١} = ٣\text{س} + ٢$.

(٢٤) $\frac{٥\text{س}-١}{\text{س}+١} = \frac{٣\text{س}}{٢}$

(٢٥) $\frac{٣\text{س}-٨}{\text{س}-٢} = \frac{٥\text{س}-٢}{\text{س}+٥}$

(٢٦) $\frac{٣\text{س}-١}{٤\text{س}+٧} = ١ - \frac{٦}{\text{س}+٧}$

(٢٧) $\frac{٤}{\text{س}-١} - \frac{٥}{\text{س}+٢} = \frac{٣}{\text{س}}$

(٢٨) $\frac{١}{١+\text{س}} - \frac{١}{٣-\text{س}} = \frac{٦}{٣٥}$

(٢٩) $\frac{\text{س}+٦}{\text{س}-٦} - \frac{\text{س}-٦}{\text{س}+٦} = \frac{١٦٨}{١٣}$

(٣٠) $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}-٣} + \frac{٣\text{س}-١١}{\text{س}-٤} = \frac{٤\text{س}+١٣}{\text{س}+١}$

(٣١) $\frac{\sqrt{\text{س}+٢}}{٤+\sqrt{\text{س}}} = \frac{٤-\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$

(٣٢) $\sqrt{٢\text{س}+٨} + ٢\sqrt{\text{س}+٥} = ١٠$

(٣٣) $\text{س} - \sqrt{\text{س}} = ٢١٠$

(٣٤) $\sqrt{\text{س}} + ٣\sqrt{\text{س}+١١} = ٢٣$

مسائل محـــلولة تطبيقا على معـادلات
الدرجة الثانيـــة التامة

٢٣٠ ولنذكر مسائل تطبيقيـة على معادلات الدرجة الثـانية التامة وكيفية حلها بطريقة اتمـام المربع فنقول

المسئلة الاولى ـ سمسار اشترى أطيانا بمبلغ ١٨٧٥ جنيه فحفظ منها خمسة فدادين وباع الباقى بمبلغ ١٦٠٠ جنيه رابحا ٥ جنيهات فى كل فدان باعه فكم فدانا اشترى

الحل نرمز لعدد الافدنة التى اشتراها بحرف س فيكون ماباعه س — ٥ ويكون ثمن الفدان فى حالة الشراء هو $\frac{١٨٧٥}{س}$ جنيها وثمن الفدان فى حالة البيع $\frac{١٦٠٠}{س — ٥}$ وحيث انه ربح ٥ جنيهات فى الفدان تحدث المعادلة

$\frac{١٨٧٥}{س}$ + ٥ = $\frac{١٦٠٠}{س — ٥}$ نحذف المقامين ونختصر فيحدث

$س^٢$ + ٥٠ س = ١٨٧٥ نضم $٢٥^٢$ للطرفين لاتمام المربع فى الطرف الاول

$س^٢$ + ٥٠ س + $٢٥^٢$ = $٢٥^٢$ + ١٨٧٥ نستعيض الطرف الاول بما يساويه

$(س + ٢٥)^٢$ = $٢٥^٢$ + ١٨٧٥ نأخذ جذر الطرفين فينتج

س + ٢٥ = ± ٥٠ نحول ٢٥ للطرف الثانى فينتج

س = — ٢٥ ± ٥٠

ومن هنا يؤخذ أن $س'$ = ٢٥ و $س''$ = — ٧٥ وبالنظر للمقدار الاول يعلم أن عدد الافدنة التى اشتراها ٢٥ فدانا ويكون ثمن الفدان ٧٥ جنيها وأما المقدار الثانى فلا يوافق المسئلة

المسئلة الثانية ـ شخص اشترى جملة ياردات من الحرير بمبلغ ٥ جنيهات انجليزية ولو أخذ بهذا المبلغ عينه من حرير آخر ينقص ثمن الياردة منه شلنا لأخذ خمس ياردات زيادة عما اشترى فما عدد الياردات التى اشتراها

الحل نرمز لعـدد الياردات التى اشـتراها بحرف $س$ فيكون ثمن الياردة $\frac{١٠٠}{س}$ شلنا وحيث انه لو أخذ من الحـرير الآخر يأخذ خمس ياردات زيادة فيكون ثمن الياردة من الحرير الثانى $\frac{١٠٠}{س+٥}$ وحيث ان ثمن الياردة فى هذه الحالة ينقص شلنا واحدا عما اشترى فتحدث المعـادلة

$\frac{١٠٠}{س+٥} + ١ = \frac{١٠٠}{س}$ وحلها نحذف المقامين ونختصر فيحدث

$س^٢ + ٥ س = ٥٠٠$ وباتمام المربع فى الطرف الاول يحدث

$س^٢ + ٥ س + (\frac{٥}{٢})^٢ = (\frac{٥}{٢})^٢ + ٥٠٠$ أو

$(س + \frac{٥}{٢})^٢ = (\frac{٥}{٢})^٢ + ٥٠٠$ نأخذ جذر الطرفين

$س + \frac{٥}{٢} = \pm ٢٢{,}٥$ نحول $\frac{٥}{٢}$ للطرف الثانى فينتج

$س = - ٢{,}٥ \pm ٢٢{,}٥$ ومن هنا يؤخذ أن

$س' = ٢٠$ ، $س'' = - ٢٥$

أعنى أن عدد الياردات التى اشتراها هو ٢٠ ياردة أما المقدار الثانى فلا يوافق المسئلة

المسئلة الثالثة ـ صانعان اشتغلا بأجرة يومية مختلفة أخذ الاول ٣٨٤ قرشا وأخذ الثانى ٢١٦ قرشا وكانت أيام شغل الثانى أقل من أيام شغل الاول بستة أيام ولكن لو اشتغل الثانى بقدر أيام الاول واشـتغل الاول بقدر أيام الثانى لأخذا أجرتين متساويتين فما عدد أيام شغل كل منهما وكم أجرته اليومية

الحل نفرض أن أيام الاول س فتكون أيام الثانى س — ٦ وتكون الاجرة اليومية للاول $\frac{٣٨٤}{س}$ والاجرة اليومية للثانى $\frac{٢١٦}{س - ٦}$ واذا اشتغل الاول بقدر أيام الثانى تكون اجرته فى هذه الايام $\frac{٣٨٤}{س}$ (س — ٦) واذا اشتغل الثانى بقدر أيام الاول تكون أجرته فى هذه الايام $\frac{٢١٦}{س - ٦}$ س وحيث انه فى هذه الحالة تكون الاجرتان متساويتين تحدث المعادلة

$$\frac{٣٨٤ (س - ٦)}{س} = \frac{٢١٦ س}{س - ٦}$$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$$س = \frac{١٩٢ \pm ١٤٤}{١٤}$$

ومن هنا يؤخذ أن $س' = ٢٤$ و $س'' = \frac{٢٤}{٧}$ وبالنظر للقدار الاول يكون أيام شغل الصانع الاول ٢٤ وأجرته اليومية ١٦ ص وأيام شغل الصانع الثانى ١٨ واجرته اليومية ١٢ ص وأما المقدار الثانى $\frac{٢٤}{٧}$. فلا يوافق المسئلة

المسئلة الرابعة — اذا سار قطار سكة حديدية ٥ كيلومترات زيادة عن سرعته الاصلية فى الساعة فانه يقطع ٢١٠ كيلو متر فى زمن أقل بساعة عما اذا سار بسرعته الاصلية ففى كم ساعة يقطع هذه المسافة بالسرعة الاصلية

الحل نرمز لعدد الساعات التى يقطع فيها هذه المسافة بالسرعة الاصلية بحرف س فتكون سرعته فى الساعة $\frac{٢١٠}{س}$ وتكون سرعته فى الساعة فى الحالة الثانية $\frac{٢١٠}{س} + ٥$ وحيث انه يقطع الطريق فى هذه

الحالة فى مدة أقل من الاولى بساعة واحدة فيقطعها فى (سـ — ١) ساعة واذ اضرب مايقطعه فى الساعة فى عدد الساعات يكون الحاصل دالا على طول الطريق وحينئذ فتحدث المعادلة

$$\left(\frac{٢١٠}{سـ} + ٥\right)(سـ - ١) = ٢١٠$$

وبحل هـذه المعادلة يوجد

$$سـ = ٥ر٠ \pm ٥ر٦$$

ومن هنا يوخذ أن سَ = ٧ , سً = — ٦ و بالنظر للمقـدار الاول يعلم أنه يقطع هذه المسافة فى ٧ ساعات بالسرعة الاولى وعلى هـذا فيقطعها فى ٦ ساعات بالسرعة الثانية وأما المقدار الثـانى فلا يوافق المسئلة

تمـــرين ٥٨

(١) عربة اتومبيل تجرى بسرعة منتظمة قطعت مسافة ١٨٠ ميـــلا فى زمن معين واذا نقصت سرعتها ثلاثة أميال فى الساعة تحتاج لثلاث ساعات زيادة لقطع تلك المسافة فما سرعتها فى الساعة

(٢) ماهو العـدد الذى اذا أضـيف اليـه جذره التربيعى كان الناتج مساو يا الى $١٥ \frac{٣}{٤}$

(٣) صاحب ورشة صـناعية بالمنصوره اشـترى من القاهرة مقدارا من الفحم الحجرى بمبلغ ٨٤ جنيها انجليز يا ولـكنه لو اشترى بهذا المبلغ فحما حجريا من الاسـكندرية لاخذه بسعر أقل من السـعر الذى اشترى به شلنان وحصل على اربع طونولاتات زيادة عما اشـترى فما مقدار السعر الذى اشترى به الطونولاته الواحدة

(٤) عدد يساوى حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة فردية متتالية واذا قسم هذا العدد على كل عدد منها كان مجموع ثلاثة خوارج القسمة يساوى ٧١ فما هذا العدد

(٥) تاجر باع قطعة قماش بمبلغ ٧٥ فرنكا ثم باع قطعة أخرى ينقص عدد أمتارها عن الاولى ستة أمتار بمبلغ ٢٧ فرنكا ولكن لو باع القطعة الاولى بسعر الثانية والثانية بسعر الاولى لبلغ الثمن ٩٠ فرنكا فما ثمن المتر من كل نوع

(٦) ا و ب محطتا سكة حديدية بينهما ٣٠٠ ميل قام فى وقت واحد من كل منهما قطار قاصدا الاخرى فتقابل القطاران و بعد ٤ ساعات من تقابلهما وصل القائم من ب الى ا و بعد ٩ ساعات من التقابل أيضا وصل القائم من ا الى ب فما سرعة كل منهما فى الساعة

(٧) محيط عجلة عربة $١٤\frac{٢}{٣}$ قدما فاذا أخذت ثانية واحدة زيادة فى كل دورة لصارت سرعة العربة أقل بمقدار $٢\frac{٢}{٣}$ ميل فى الساعة فما سرعتها فى الساعة بالميل

(٨) بيعت قطعة أرض بسعر الفدان ١٤٤ جنيها وكان أصل ثمن الشراء بسعر س جنيها و بذلك وجد أن ربح الفدان س ./. فما مقدار س

(٩) حوض يملأ بحنفيتين معا فى $٢٢\frac{١}{٢}$ دقيقة والكبرى تملؤه فى زمن أقل من الصغرى بمقدار ٢٤ دقيقة والمطلوب معرفة الوقت الكافى لملئه بكل منهما

(١٠) راكب دراجة قطع مسافة فى مدة أربع ساعات وآخر قطع ٨ كيلومترات زيادة عنه فى هذا الزمن ومعلوم أن الاول يلزمه ٤٢ دقيقة زيادة عن الثانى فى قطع ٢٨ كيلومتر فكم كيلومتر قطعها الاول فى الاربع ساعات وما متوسط سرعة كل منهما فى الساعة

(١١) حـ و ى محطتان بينهما ٢٤٠ ميلا قام قطار ا من حـ وبعد ساعة قام قطار ب من حـ أيضا و بعد ساعتين وصل الى نقطة مر عليها ا منذ ٤٥ دقيقة فزيدت سرعته خمسة أميال فى الساعة و بذلك لحق ب القطار ا وقت وصوله نقطة ى فما السرعة التى قام بها كل منهما من حـ

(١٢) شخص اشترى مقدارا من البرتقال بمبلغ ٢٠٠ مليم فتلف منه ٢٥ برتقالة وباع كل برتقالة من الباقى بثمن يزيد عن ثمنها الاصلى $\frac{٣}{٤}$ مليم وبذلك ربح ٧٠ مليما فكم عدد البرتقال الذى اشتراه

(١٣) غيط مستطيل الشكل محيطه ٥٠٠ ياردة ومساحته ١٤٤٠٠ ياردة مربعة فما مقـــدار بعديه

(١٤) قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها ١٥٤ مترا وقطرها ٥٥ مـترا والمطلوب معرفة طولها وعرضها

(١٥) محيط مربع يزيد عن محيط مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة الاكبر تزيد عن ثلاثة أمثال مساحة الاصغر ٣٢٥ قدما مربعا فما ضلع كل منهما

(١٦) فى وسط قطعة أرض مربعة الشكل قصر مربع الشكل وحول هذا القصر ممشى من الحصباء عرضها أربعة أمتار وحول هذا الممشى زرع عرضه ٦ أمتار فاذا كان مساحة القصر والزرع ٧٢١ مترا مربعا فما مساحة القصر

(١٧) المطلوب ايجاد ثلاثة أعـداد صحيحة متتالية بحيث تكون مقادير أضـلاع مثلث قائم الزاوية

(١٨) ا ب مستقيم طوله ١٠ سنتيمترات مد الى نقطة ع بحيث كان ا ب × ا ع = ب ع^{٢} أوجد مقدار ا ع و ب ع مقربا من المليمتر

(١٩) المعـلوم مستقيم حـ والمطلوب تقسيمه الى قسمة ذات وسط وطرفين أى الى قسمين أكبرهما يكون وسـطا متناسبا بين المسـتقيم الكلى والجزء الاصغر ثم ايجاد المقدار الرقمى الناتج بفرض حـ يساوى ١٢ سنتيمتر

(٢٠) المطلوب ايجاد القانون الذى يحسب به نصف قطر احدى قاعدتى مخروط ناقص بعد معرفة حجمه ونصف قطر القاعدة الاخرى والارتفاع

مناقشة المعادلات ذات الدرجة الثـانية

٢٢١ تقدم بنمرة ٢١٨ أن معادلات الدرجة الثانية يمكن أن تأخذ صورة عمومية واحدة وهى $س^{٢} + ى\,س + ح = ٠$ التى منها

$$س = -\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ح}$$

ولمناقشة هذا القانون يقال انه يمكن أن يعتبر فيه ثلاث حالات

الحالة الاولى ــ اذا كانت الكمية التى تحت علامة الجذر وهى $\frac{ى^{٢}}{٤} - ح > ٠$ أى موجبة يكون الجذران حقيقيين ومختلفى المقــدار ويدخل تحت ذلك ثلاث صور

الصورة الاولى ــ اذا كان $ح > ٠$ أى موجبة تكون تحت الجذر سالبة و يكون

$$\frac{ى^{٢}}{٤} - ح < \frac{ى^{٢}}{٤} \quad \text{ومنه} \quad \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ح} < \frac{ى}{٢}$$

و يكون مقــدارا س فى هذه الحالة بعلامة $-\frac{ى}{٢}$ يعنى يكون له مقداران مختلفان بعلامة واحدة مخالفة لعلامة ى فى المعادلة

الصورة الثانية ــ اذا كان $ح = ٠$ يكون

$$\sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ح} = \frac{ى}{٢}$$

ويكون مقــدارا س هما $-\frac{ى}{٢} \pm \frac{ى}{٢}$ ومنه يكون $س' = ٠$ ، $س'' = -ى$

يعنى ان للمجهول مقداران أحدهما صفر والثانى يساوى مكرر س بعلامة مخالفة لعلامته

الصورة الثالثة ـ اذا كان $ح < ٠$ اى سالبة تكون تحت الجذر موجبة ويكون

$$\frac{ى^{٢}}{٤} - ح < \frac{ى}{٤} \quad \text{ومنه} \quad \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ح} < \frac{ى}{٢}$$

ويكون مقدارا س فى هـذه الصورة بعلامة الجذر يعنى يكون له مقداران مختلفان بعلامتين مختلفتين وزيادة على ذلك فان أكبرهما فى القيمة المطلقة تكون علامته مخالفة لعلامة ى فى المعادلة

الحالة الثانية ـ اذا كانت الكمية التى تحت الجذر وهى $\frac{ى^{٢}}{٤} - ح = ٠$ أى معدومة يكون الجذران حقيقيين ومتساويين يعنى ان يمحى ماتحت علامة الجذر ويكون $س = -\frac{ى}{٢} \pm ٠$ ومنه يكون

$$س' = -\frac{ى}{٢} \quad , \quad س'' = -\frac{ى}{٢}$$

ومن ذلك يلاحظ أنه كلما كان المجذور $\frac{ى^{٢}}{٤} - ح > ٠$ أى غير معـدوم كان الجـذران مختلفين عن بعضهما وهمـا يميـلان الى نهاية واحدة متى مال $\frac{ى^{٢}}{٤} - ح$ الى الصفر وهذه النهاية هى $-\frac{ى}{٢}$

الحالة الثالثـة ـ اذا كان المجذور $\frac{ى^{٢}}{٤} - ح < ٠$ أى سالبـا يكون الجذران تخيليين لأنه لمـا كان المقدار الذى تحت الجذر سالبا فلا يمكن استخراجه ولهذا يكون الجذران تخيليين

الارتباط بين جذرى معادلة الدرجة الثانية ومكرراتها

٢٢٢ تقدم أن كل معادلة ذات درجة ثانيـة يمكن أن توضع على هذه الصورة

$$س^{٢} + ى س + هـ = ٠$$

وانه اذا رمز لمقدارى المجهول بحرفى $س'$ و $س''$ يكون

$$س' = -\frac{ى}{٢} \pm \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ه} \quad و$$

$$س'' = -\frac{ى}{٢} - \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ه}$$

فأولا ــ اذا جمع هذان المقداران ينتج

$$س' + س'' = -ى$$

أعنى أن مجموع جذرى معادلة الدرجة الثانية يساوى مكرر المجهول بدرجة أولى مع تغيير اشارته

وثانيا ــ اذا ضرب أحد المقدارين السابقين فى الآخر ينتج

$$س'س'' = \left(-\frac{ى}{٢} + \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ه}\right)\left(-\frac{ى}{٢} - \sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - ه}\right)$$

وحيث ان الطرف الثانى هو عبارة عن حاصل ضرب مجموع كميتين فى تفاضلهما فيساوى الفرق بين مربعيهما أعنى يكون

$$س'س'' = \frac{ى^{٢}}{٤} - \left(\frac{ى^{٢}}{٤} - ه\right) = ه$$

أعنى أن حاصل ضرب جذرى المعادلة يساوى الكمية المعلومة

٢٢٣ تنبيه اذا كانت معادلة الدرجة الثانية بالصورة $ح س^{٢} + ى س + ه = ٠$ فيسهل أن يرى مباشرة أن مجموع الجـذرين $= -\frac{ى}{ح}$ و حاصل ضربهما $= \frac{ه}{ح}$

٣٢٤ نتيجة أولى يمكن بواسطة ماتقدم معرفة اشارة جذرى معادلة الدرجة الثانية قبل حلها ولذلك يقال حيث ان $س' \times س'' = ه$ و $س' + س'' = -ى$ فاذا كان ه موجبا علم أن اشارتى

المضروبين سَ و سً من نوع واحد ونوع الاشارتين يخالف اشارة ء لأن مجموعهما يخالف تلك الاشارة

وأما اذا كان هـ سالبا فتكون الاشارتان مختلفتـين وتكون اشار أ كبرهما فى المقدار المطلق مخالفة لاشارة ء

مثال (١) لمعرفة اشارتى جذرى المعادلة

سـ٢ — ٧ سـ + ١٠ = ٠

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى ١٠ وهو موجب فيكونان متحدى الاشارة وحيث ان مجموعهما يساوى ٧ فيكونان موجبين

مثال (٢) لمعرفة اشارتى جذرى المعادلة

سـ٢ + ٥ سـ — ٢٤ = ٠

يقال حيث ان حاصل ضرب الجذرين يساوى — ٢٤ وهو سالب فيكونان مختلفى الاشارة وحيث ان مجموعهما يساوى — ٥ فيكون المقدار المطلق لأكبرهما سالبا وقس على هذا

٢٢٥ نتيجة ثانية يمكن بواسطة ماتقدم تكوين معادلة الدرجة الثانية بعد معرفة جذريها

مثال (١) اذا كان جذرا معادلة هما سَ = ٥ , سً = ٨ يكون سَ + سً = ٥ + ٨ = ١٣ , سَ سً = ٥ × ٨ = ٤٠

وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى هو — ١٣ والكمية المعلومة

هى ٤٠ وتكون المعادلة هى

س^{٢} − ١٣ س + ٤٠ = ٠

مثال (٢) اذا كان س′ = ٣ + √٥ , س″ = ٣ − √٥ يكون

س′ + س″ = ٣ + √٥ + ٣ − √٥ = ٦ ,

س′ س″ = (٣ + √٥) (٣ − √٥) = ٩ − ٥ = ٤

وحينئذ يكون مكرر المجهول بدرجة أولى − ٦ والكمية المعلومة ٤ وتكون المعادلة

س^{٢} − ٦ س + ٤ = ٠

مثال (٣) اذا كان س′ = ٥ + ٣ √−١ , س″ = ٥ − ٣ √−١ يكون

س′ + س″ = ٥ + ٣ √−١ + ٥ − ٣ √−١ = ١٠

, س′ س″ = (٥ + ٣ √−١) (٥ − ٣ √−١) = ٢٥ + ٩ = ٣٤

ويكون مكرر المجهول بدرجة أولى − ١٠ والكمية المعلومة ٣٤ وتكون المعادلة

س^{٢} − ١٠ س + ٣٤ = ٠

٢٢٦ نتيجة ثالثة ــ اذا علم مجموع عددين وحاصل ضربهما يمكن أن توضع معادلة ذات درجة ثانية يكون جذراها العددين المذكورين

مثلا اذا كان مجموع عددين ١٦ وحاصل ضربهما ٦٣ فيكون العددان المطلوبان هما جذرا معادلة ذات درجة ثانية فيها مكرر المجهول بدرجة أولى ــ ١٦ والكمية المعلومة ٦٣ وحينئذ فتوضع المعادلة

س^{٢} − ١٦ س + ٦٣ = ٠ وبحلها يوجد

س = ٨ ± $\sqrt{٦٤ − ٦٣}$ أى

س′ = ٩ و س″ = ٧

أى أن العددين المطلوبين هما ٩ و ٧

تمرين ٥٩

بين علامتى جذور كل واحدة من المعادلات الآتية قبل حلها

(١) س^{٢} − ٦ س + ٥ = ٠
(٢) س^{٢} + ٣ س − ١٠ = ٠
(٣) س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠
(٤) س^{٢} − ٨ س − ٢٠ = ٠
(٥) ٦ س^{٢} − ١٣ س + ٦ = ٠
(٦) ٣ س^{٢} − ٤ س − ٤ = ٠
(٧) ٩ س^{٢} − ١٢ س + ٤ = ٠
(٨) ٢ س^{٢} + ٩ س + ٧ = ٠

المطلوب تكوين معادلات الدرجة الثانية التى جذورها الكميات الآتية

(٩) ٢ و ٣
(١٠) ٤ و ٧
(١١) ٠٫٥ و − ٣
(١٢) − ٣ و − ٧
(١٣) ٢ + $\sqrt{٣}$ و ٢ − $\sqrt{٣}$
(١٤) ٥ + $\sqrt{٢}$ و ٥ − $\sqrt{٢}$

(١٥) $٢+\sqrt{-١}$ و $٢-\sqrt{-١}$

(١٦) $-١+٢\sqrt{-١}$ و $-١-٢\sqrt{-١}$

(١٧) ماهما العددان اللذان مجموعهما ١٥ وحاصل ضربهما ٥٤

(١٨) ماهما العددان اللذان مجموعهما ـ ١٩ وحاصل ضربهما ٩٠

(١٩) اقسم ٦٠ الى جزأين بحيث يكون حاصل ضربهما ٨٩٩

(٢٠) ماهو العدد القاسم الى ٣٦ بحيث يكون مجموع المقسوم عليه والخارج ١٥

(٢١) مابعدا المستطيل الذى محيطه ٢٨ قدما ومساحته ٤٥ قدما مربعا

المعادلات المضاعفة التربيع

٢٢٧ تعريف ـ المعادلة المضاعفة التربيع هى معادلة ذات درجة رابعة لاتحتوى على المجهول بأس فردى

مثل المعادلة $\text{س}^{٤}+\text{د}\,\text{س}^{٢}+\text{هـ}=٠$

٢٢٨ حل المعادلة المضاعفة التربيع ـ لحل المعادلة

$$\text{س}^{٤}+\text{د}\,\text{س}^{٢}+\text{هـ}=٠$$

نفرض أن $\text{س}^{٢}=\text{ص}$ فيكون $\text{س}^{٤}=\text{ص}^{٢}$ وتؤول المعادلة الى

$\text{ص}^{٢}+\text{د}\,\text{ص}+\text{هـ}=٠$ وبحل هذه المعادلة يوجد

$$\text{ص}=-\frac{\text{د}}{٢}\pm\sqrt{\frac{\text{د}^{٢}}{٤}-\text{هـ}} \qquad (١)$$

وحيث ان $\text{ص}=\text{س}^{٢}$ فبوضعه بدله يحدث

$\text{س}^{٢}=-\frac{\text{د}}{٢}\pm\sqrt{\frac{\text{د}^{٢}}{٤}-\text{هـ}}$ وبأخذ جذر الطرفين يحدث

$$\text{س}^{٢}=\pm\sqrt{-\frac{\text{د}}{٢}\pm\sqrt{\frac{\text{د}^{٢}}{٤}-\text{هـ}}}$$

وهذا هو القانون العام للمعادلة المضاعفة التربيع ومنه يؤخذ أن للمجهول س أربعة مقادير فاذا رمز لها بالحروف $\text{س}'$ و $\text{س}''$ و $\text{س}'''$ و $\text{س}''''$ يحدث

$$\text{س}' = \sqrt{-\frac{\text{ء}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ء}^{٢}}{٤} - \text{هـ}}} \;,\; \text{س}'' = \sqrt{-\frac{\text{ء}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ء}^{٢}}{٥} - \text{هـ}}} \;,$$

$$\text{س}''' = -\sqrt{-\frac{\text{ء}}{٢} + \sqrt{\frac{\text{ء}^{٢}}{٤} - \text{هـ}}} \;,\; \text{س}'''' = -\sqrt{-\frac{\text{ء}}{٢} - \sqrt{\frac{\text{ء}^{٢}}{٤} - \text{هـ}}}$$

مثال ـ لحل المعادلة $\text{س}^{٤} - ٥\,\text{س}^{٢} + ٤ = ٠$

نستعمل القانون السابق فيحدث

$$\text{س} = \pm\sqrt{٢{,}٥ \pm \sqrt{٦{,}٢٥ - ٤}}$$ ومنه يكون

$\text{س}' = ٢$, $\text{س}'' = ١$, $\text{س}''' = -٢$, $\text{س}'''' = -١$

وكل منها يحقق المعادلة

٢٢٩ تنبيه (١) اذا كان جذرا المعادلة (١) حقيقيين وايجابيين تكون هذه المقادير كلها حقيقة وإذا كان أحد جذرى المعادلة المذكورة ايجابيا والآخر سلبيا يكون اثنان من هذه المقادير حقيقيين واثنان تخيليين واذا كانا سلبيين تكون هذه المقادير كلها تخيلية

تنبيه (٢) اذا كان للمجهول بدرجة رابعة مكرر غير الواحد كما فى المعادلة

$$\text{ح}\,\text{س}^{٤} + \text{ء}\,\text{س}^{٢} + \text{هـ} = ٠$$

فاما أن نقسم جميع حدودها على ح ونجرى العمل كما فى النمرة السابقة واما أن نفرض فى هذه المعادلة مباشرة أن $س^{٢} = ص$ ويكون $س^{٤} = ص^{٢}$ وتؤول المعادلة المفروضة الى معادلة ذات درجة ثانية بالصورة التى للمجهول بدرجة ثانية مكرر غير الواحد وتحل كما تقدم بنمرة ٢١٦

تمرين ٦٠

المطلوب حل المعادلات الآتية

(١) $س^{٤} - ١٣ س^{٢} + ٣٦ = ٠$

(٢) $س^{٤} - ٤١ س^{٢} + ٤٠٠ = ٠$

(٣) $٤ س^{٤} - ٥ س^{٢} + ١ = ٠$

(٤) $س^{٤} - ١٠ س^{٢} + ٩ = ٠$

(٥) $س^{٤} - ٣٥ س^{٢} - ٣٦ = ٠$

(٦) $س^{٤} - ٤٥ س^{٢} - ١٩٦ = ٠$

(٧) $س^{٤} - ٢ س^{٢} - ٦٣ = ٠$

(٨) $٨ س^{٤} + ٣٠ س^{٢} - ٥،٥ = ٠$

(٩) $س^{٤} + ١٣ س^{٢} + ٣٦ = ٠$

(١٠) $٦ س^{٤} - ٦ س^{٢} + ٧ = ٠$

(١١) ما هو العدد الذى اذا ضرب فى باقى طرحه من مكعبه ينتج ٦٠٠

(١٢) ابحث عن أساس العدية التى يكتب بها العدد ١٢٥٥١ مبينا بالوضع ٣٠٤٠٧

معادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

٢٣٠ معادلة الدرجة الثانية ذات المجهولين يمكن أن تحتوى على كل منهما بدرجة ثانية وبدرجة أولى وعلى حاصل ضربهما وعلى كمية معلومة ــ مثل

$$ا س^{٢} + ب ص^{٢} + ح س + د ص + هـ س ص + و = ٠$$

وكل من المقادير ا و ب و ح و د و هـ و و قد يكون حدا واحدا او كمية ذات حدود موجبة أو سالبة وقد يكون بعضها معدوما

٢٣١ مجموعة معادلتين بدرجة ثانية ـ قد تحتوى هذه المجموعة على معادلة بدرجة ثانية وأخرى بدرجة أولى وقد تحتوى على معادلتين كل منهما بدرجة ثانية .

٢٣٢ قاعدة ـ لحل مجموعة معادلتين بمجهولين احداهما بدرجة ثانية والأخرى بدرجة أولى تتبع طريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى ويراعى حذف أحد المجهولين بطريقة الوضع بأن يستخرج مقداره من المعادلة ذات الدرجة الاولى ويعوض به فى الثانية

المثال الاول ـ لحل المجموعة $٢ سـ^٢ + ٣ صـ^٢ = ٣٥$ (١)

$سـ + ٢ صـ = ٨$ (٢)

نستخرج مقدار سـ من معادلة ٢ ونضع الناتج بدلا عن سـ فى معادلة ١ فينتج $٢ (٨ - ٢ صـ)^٢ + ٣ صـ^٢ = ٣٥$ (٣)

وبحل هذه المعادلة نجد $صـ = ٣$ أو $\frac{٣١}{١١}$ فاذا وضع هذان المقداران على التوالى بدلا عن صـ فى معادلة ٢ واستخرج من المعادلة الناتجة مقدار سـ ينتج $سـ = ٢$ أو $\frac{٢٦}{١١}$ وعلى هذا يكون

$سـ = ٢ ، صـ = ٣$ أو $سـ = \frac{٣١}{١١} ، صـ = \frac{٢٦}{١١}$

وكلا الحلين يحقق المجموعة

المثال الثانى ـ لحل المجموعة

$سـ^٢ + ٥ سـ صـ - ٢ صـ^٢ + ٣ سـ - ٢٢ = ٠$ (١)

$٧ سـ - صـ = ١١$ (٢)

نستخرج مقدار صـ من معادلة (٢) فنجد صـ = ٧ سـ – ١١ ثم نضع هذا المقدار بدلا عن صـ فى معادلة (١) فيحدث

سـ٢ + ٥ سـ (٧ سـ – ١١) – ٢ (٧ سـ – ١١)٢ + ٣ سـ – ٢٢ = ٠ ثم نحذف الأقواس ونختصر الحدود المتشابهة فيحدث

٦٢ سـ٢ – ٢٥٦ سـ + ٢٦٤ = ٠ ويحل هذه المعادلة

يحدث سـ = ٦٦/٣١ أو ٢.

فاذا وضع بدلا عن سـ المقدار الاول ٤/٣١ ٢ فى معادلة (٢) ينتج أن صـ = ٢٨/٣١ ٣ واذا وضع بدلا عن سـ المقدار الثانى ٢ فى تلك المعادلة ينتج أن صـ = ٣

٢٣٣ حل مجموعات خصوصية بدرجة ثانية ذات مجهولين مكونة من معادلتين احداهما بدرجة أولى ـ يمكن حل بعض مجموعات بدرجة ثانية ومجهولين فى أحوال خصوصية بطرق تحايلية كثيرة الاستعمال وأهمها ايجاد مقدارى المجهولين بواسطة تكوين معادلة ذات درجة ثانية من مجموع كميتين وحاصل ضربهما أو تحويل المجموعة الى مجوعة مكافئة لها ذات درجة أولى (واليك بيانها)

الحالة الاولى ـ اذا أريد حل المجموعة

سـ + صـ = ١٠ (١)

سـ صـ = ٢٤ (٢)

يشاهد مباشرة أن مقـدارى س و ص هما جذرا معادلة بدرجة ثانية (٢٢٦) فاذا رمز لمجهولها بحرف ع يحدث

$ع^٢ - ١٠ ع + ٢٤ = ٠$ وبحلها نجد

$ع = ٥ \pm ١$

ويكون أحد الجذرين هو مقدار س والآخر مقدار ص أى

س = ٦ ، ص = ٤ أو بالعكس

ويمكن حل هذه المجموعة بطريقة أخرى وهى يربع طرفا معادلة (١) فينتج $س^٢ + ص^٢ + ٢ س ص = ١٠٠$ ويؤخذ من معادلة (٢) أن ٤ س ص = ٩٦ تطـرح هـذه المعادلة من السابقة فينتج

$س^٢ + ص^٢ - ٢ س ص = ٤$ وبأخذ الجـذر الـتربيعى للطرفين ينتج

$س - ص = \pm ٢$ (٣)

ثم يكون من معادلتى (١) , (٣) مجموعة تكون باحدى الصورتين

ا { س + ص = ١٠ (١) ، س - ص = ٢ (٢) } ب { س + ص = ١٠ (١) ، س - ص = -٢ (٢) }

وبحل مجمـــوعة (ا) ينتـج س = ٦ , ص = ٤

وبحل مجمـــوعة (ب) ينتـج س = ٤ , ص = ٦

الحالة الثانية ـ لحل المجموعة س - ص = ٢ (١)

س ص = ٢٤ (٢)

نعتبر أن المجهولين هما سـ و — صـ فيكون مجموعهما سـ + (— صـ) = ٢ وحاصل ضربهما سـ × — صـ = — ٢٤
ويكون سـ ، — صـ هما جذرا المعادلة

$ع^{٢}$ — ٢ ع + ٢٤ = ٠ وبحلها نجد

ع = ١ ± ٥

ويكون أحد الجذرين هو مقدار سـ والثانى مقدار — صـ فاما أن يكون سـ = ٦ ، — صـ = — ٤ وبناء عليه يكون صـ = ٤ واما أن يكون سـ = — ٤ ، — صـ = ٦ فيكون صـ = — ٦ والتحقيق واضح

ويمكن أن تحل هذه المجموعة بطريقة أخرى وهى أن يربع طرفا معادلة (١) .

فينتج $سـ^{٢}$ + $صـ^{٢}$ — ٢ سـ صـ = ٤ ويؤخذ من معادلة (٢)
أن ٤ سـ صـ = ٩٦ لجمع هاتين المعادلتين
فنجد $سـ^{٢}$ + ٢ سـ صـ + $صـ^{٢}$ = ١٠٠ وبأخذ جذر الطرفين
ينتج سـ + صـ = ± ١٠ (٣)

ثم يكون من معادلتى (١) ، (٣) مجموعة تكون باحدى الصورتين

ا { سـ — صـ = ٢
سـ + صـ = ١٠

ب { سـ — صـ = ٢
سـ — صـ = — ١٠

وبحل مجموعة (ا) يحدث سـ = ٦ ، صـ = ٤
وبحل مجموعة (ب) يحدث سـ = — ٦ ، صـ = — ٤

الحالة الثالثة — لحل المجموعة

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ (١)

$س + ص = ٥$ (٢)

نربع طرفي المعادلة الثانية فيحدث

$س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ٢٥$ (٣)

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة ٣ فيحدث

$٢ س ص = ١٢$ أو $س ص = ٦$ (٤)

فاذا كونت مجموعة من معادلتي ٢ و ٤ يشاهد أنه قد علم مجموع كميتين وحاصل ضربهما فيكون مقدارا س و ص هما جذرا المعادلة

$ع^{٢} - ٥ ع + ٦ = ٠$ (٥) وبحلها يحدث

$ع = ٢,٥ \pm ٠,٥$

ويكون أحد الجذرين مقدار س والآخر مقدار ص أي

$س = ٣$ و $ص = ٢$ أو بالعكس

ويصح أنه بعد الحصول على معادلة (٤) يكون منها ومن معادلة (٢) مجموعة تحل بالطريقة الأخيرة من الحالة الاولى

الحالة الرابعة — لحل المجموعة $س^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ (١)

$س - ص = ١$ (٢)

نربع طرفي المعادلة (٢) فينتج $س^{٢} + ص^{٢} - ٢ س ص = ١$ (٣)

ثم نطرح المعادلة (١) من المعادلة (٣) فينتج

$- ٢ س ص = - ١٢$ أو $- س ص = - ٦$ (٤)

فاذا كونت مجموعة من معـادلتى (١) و (٤) واعتبر أن المجهولين س و − ص كان مجموعهـــما يساوى ١ وحاصل ضربهـــما يساوى − ٦ ويكون مقدارا س و ص هـما جذرا المعادلة

ع^{٢} − ع − ٦ = ٠ (٥) وبحل هذه المعادلة نجد

ع = ٠,٥ ± ٢,٥ أى عَ = ٣ , ع″ = − ٢

ويكون أحد الجذرين مقدار س والآخر مقدار − ص فاما أن يكون س = ٣ , − ص = − ٢ وبنـاء عليـه يكون ص = ٢ واما أن يكون س = − ٢ , − ص = ٣ وبناء عليه يكون ص = − ٣

ويصح بعد الحصول على معادلة (٤) أن يكون منها ومن معادلة (٢) مجموعة تحل بالطريقة الأخيرة من الحالة الثانية

الحالة الخامسة ـ اذا أريد حل المجموعة

س^{٢} − ص^{٢} = ٢٠ (١)

س + ص = ١٠ (٢)

يلاحظ أن معـادلة (١) يمكن أن تكتب هكذا

(س + ص) (س − ص) = ٢٠ (٣) وبقسمة طرفى هـذه المعادلة على طرفى معادلة (٢) ينتج س − ص = ٢ (٤)

ثم يكون من معادلتى (٢) و (٤) مجموعة بحلها نجد

س = ٦ , ص = ٤

الحالة السادسة ـ اذا أريد حل المجموعة

$$س^{٢} - ص^{٢} = ٢٠ \qquad (١)$$

$$س - ص = ٢ \qquad (٢)$$

يلاحظ كما فى الحالة السابقة أن معادلة (١) تقبل القسمة على معادلة (٢) وبقسمتها عليها ينتج $س + ص = ١٠$ (٣)

ثم تكوّن مجموعة من معادلتى (٢) , (٣) وبحلها نجد

$$س = ٦ \ , \ ص = ٤$$

الحالة السابعة ـ اذا أريد حل المجموعة

$$س^{٢} + ٥ س ص + ص^{٢} = ١٧٢ \qquad (١)$$

$$س + ص = ١٠ \qquad (٢)$$

تربع المعادلة الثانية وتطرح من الاولى فينتج $٣ س ص = ٧٢$

أو $س ص = ٢٤$ (٣)

ثم تكوّن من معادلتى (٢) , (٣) مجموعة تحل كما تقدّم فنجد ان $س = ٦ , ص = ٤$ أو بالعكس

الحالة الثامنة ـ اذا أريد حل المجموعة

$$س^{٢} + ٥ س ص + ص^{٢} = ١٧٢ \qquad (١)$$

$$س - ص = ٢ \qquad (٢)$$

تربع معادلة (٢) ويطرح الناتج من معادلة (١) فينتج $٧ س ص = ١٦٨$ أو $س ص = ٢٤$ (٣) ثم تكون من معادلتى ٢و٣ مجموعة تحل كما تقدم فنجد $س = ٦ , ص = ٤$ أو بالعكس

٢٣٤ تنبيه ـ يمكن حل هذه المجموعات الخصوصية بالطريقة العمومية نمرة ٢٣٢

تمرين ٦١

المطلوب حل المجموعات الآتية

(١) س + ص = ٧٫٥
س ص = ١٤

(٢) ٥ س + ٤ ص = ٢٢
س ص = ٦

(٣) س − ص = ٢
س ص = ٦٣

(٤) ٢ س − ص = ٥
س ص = ٤٢

(٥) ٣ س − ٢ ص = ٠
س ص = ١٣٫٥

(٦) ٢ س − ٢ ص = ١١
س ص = ٣

(٧) س + ص = ٧
س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

(٨) ٢ س + ٣ ص = ١٤
٤ س^{٢} + ٩ ص^{٢} = ١٤٨

(٩) س − ص = ٣
س^{٢} + ص^{٢} = ١٢٫٥

(١٠) ٣ س − ص = ١٠
٩ س^{٢} + ص^{٢} = ١١٠٫٥

(١١) س^{٢} − ص^{٢} = ٥٦
س + ص = ١٤

(١٢) ٩ س^{٢} − ص^{٢} = ٣٥
٣ س + ص = ٧

(١٣) س^{٢} − ص^{٢} = ١٦
س − ص = ٢

(١٤) س − ٢ ص = ٢
س^{٢} − ٤ ص^{٢} = ٢٨

(١٥) س^{٢} + ص^{٢} + ٣ س ص = ١٧٩
س + ص = ١٢

(١٦) س^{٢} + ١٥ س ص + ص^{٢} = ٣٥
س + ص = ٣

(١٧) س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} = ٦١
س − ص = ١

(١٨) ٩ س^{٢} + ٦ س ص + ٤ ص^{٢} = ١٣٣
٣ س − ٢ ص = ٥

٢٣٥ حل مجموعة معادلتين كلتاهما بدرجة ثانية ـ تحل هذه المجموعة بطريقة مماثلة لحل مجموعة معادلتين بدرجة أولى غير أنه بعد حذف أحد المجهولين اذا لم نتوصل الى معادلة من المعادلات التى سبق الكلام على حلها (كأن وجدت بدرجة رابعة واشتملت على المجهول بدرجات ثالثة وثانية وأولى) فلا يمكن الحل بواسطة ماتقدم وانما تحل بواسطة طرق تحايليه ان أمكن والا فبواسطة قواعد مقرره فى علم الجبر العالى

المثال الاول ـ اذا أريد حل المجموعة

$$٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} = ٧٧ \qquad (١)$$

$$٣ س^{٢} - ص^{٢} = ٦٦ \qquad (٢)$$

نحذف المجهول ص بطريقة الجمع أو الطرح فينتج

$١١ س^{٢} = ٢٧٥$ ومنها $س = \pm ٥$.

فاذا وضع بدلا عن س مقداره الاول وهو ٥ فى معادلة (١) ينتج

$٥٠ + ٣ ص^{٢} = ٧٧$ (٣) ومنها $ص = \pm ٣$

فيكون $س = ٥$, $ص = ٣$ أو $س = ٥$, $ص = - ٣$

واذا وضع بدلا عن س مقداره الثانى $- ٣$ فى معادلة (١) تنتج المعادلة (٣) عينها ويكون $س = - ٥$, $ص = ٣$ أو $س = - ٥$, $ص = - ٣$

المثال الثانى ـ اذا أريد حل المجموعة

$$س^{٢} + ص^{٢} - ٣ س ص + س - ص + ٦ = ٠ \qquad (١)$$

$$٢ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٥ س ص - س + ٢ ص - ٦٩ = ٠ \qquad (٢)$$

نضرب طرفى معادلة (١) فى ٣ ثم نطرح من الناتج معادلة (٢)
فينتج $س^{٢} - ١٤ س ص + ٤ س - ٥ ص + ٨٧ = ٠$ (٣)

ثم نستخرج من هــذه المعادلة مقدار ص بفرض أن س معلوم فينتج $ص = \frac{س^{٢} + ٤ س + ٨٧}{١٤ س + ٥}$ (٤) ثم نستعيض المجهول ص فى معادلة (١) بمقداره من معادلة (٤) فينتج

$$س^{٢} + \left(\frac{س^{٢} + ٤ س + ٨٧}{١٤ س + ٥}\right)^{٢} - \frac{٣ س (س^{٢} + ٤ س + ٨٧)}{١٤ س + ٥}$$
$$+ س - \frac{س^{٢} + ٤ س + ٨٧}{١٤ س + ٥} + ٦ = ٠$$

وبحذف المقامات والاختصار يحدث

$$١٥٥ س^{٤} + ١٤٧ س^{٣} - ٢٢٤٤ س^{٢} - ٩٨٢ س + ٧٢٨٤ = ٠ \quad (٥)$$

وحيث ان هذه المعادلة (٥) بدرجة رابعة ومشتملة على المجهول س بدرجات ثالثة وثانيــة وأولى فلا يمكن حلها بواســطة ماتقدم من القواعد

٢٣٦ توجد طرق مهمة تحايلية لحل مجموعات خصوصية ذات معادلتين احداهما أو كلتاهما بدرجة أعلى من الدرجة الاولى سنبينها بالأمثلة الآتيـــة

المثال الاول لحل المجموعة $س^{٢} + ص^{٢} = ٨٩$ (١)
$س ص = ٤٠$ (٢)

نضرب معادلة (٢) فى ٢ ونجمع المعادلة التى تنتج على معادلة (١) ثم نطرحها منها فينتج على التوالى

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س ص = ١٦٩ (٣)

س^{٢} + ص^{٢} − ٢ س ص = ٤٩ (٤)

و بأخذ جذر كل من طرفى هاتين المعادلتين نجد

س + ص = ± ١٣ (٥)

س − ص = ± ٧ (٦)

ومن معادلتى (٥) و (٦) تكون الاربع مجموعات الآتية

(١) س + ص = ١٣	(٣) س + ص = ١٣
س − ص = ٧	س − ص = −٧
(٢) س + ص = −١٣	(٤) س + ص = −١٣
س − ص = −٧	س − ص = ٧

وبحل هذه المجموعات ينتج على التوالى س = ١٠ و ص = ٣ ، س = − ١٠ و ص = − ٣ ، س = ٣ و ص = ١٠ ، س = − ٣ ، ص = − ١٠

المثال الثانى ـ لحل المجموعة س^{٣} − ص^{٣} = ٩٨ (١)

س − ص = ٢ (٢)

تقسم معادلة (١) على معادلة (٢) ثم نربع معادلة ٢ ينتج

س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٤٩ (٣)

س − ٢ س ص + ص^{٢} = ٤ (٤)

نطرح معادلة (٤) من معادلة (٣) فينتج

$٣\,س\,ص = ٤٥$ أى $س\,ص = ١٥$ (٥)

ومن معادلتى (٢) , (٥) يمكن تكوين مجموعة تحل كما سبق فى الحالة الثانية من نمرة ٢٣٣ فنجد $س = ٥ \,,\, ص = ٣$

أو $س = -٣ \,,\, ص = -٥$

المثال الثالث ـ حل المجموعة $س^{٤} + س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ١٣٣$ (١)

$س^{٢} + س\,ص + ص^{٢} = ١٩$ (٢)

نقسم معادلة (١) على معادلة (٢) فينتج

$س^{٢} - س\,ص + ص^{٢} = ٧$ (٣)

نجمع معادلتى (٢) , (٣) ثم نطرح معادلة (٣) من معادلة (٢) فينتج على التوالى $٢\,س^{٢} + ٢\,ص^{٢} = ٢٦$ (٤)

$٢\,س\,ص = ١٢$ (٥)

ثم نقسم كلا من معادلتى (٤) , (٥) على ٢ فينتج

$س^{٢} + ص^{٢} = ١٣$ (٦)

$س\,ص = ٦$ (٧)

ثم تحل هذه المجموعة كما فى المثال الاول فتوجد أربعة حلول وهى

$س = ٣ \,,\, ص = ٢$ ، $س = -٣ \,,\, ص = -٢$

، $س = ٢ \,,\, ص = ٣$ ، $س = -٢ \,,\, ص = -٣$

المثال الرابع ـ حل المجموعة $\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} = \frac{٢}{١٥}$ (١)

$\frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{ص^{٢}} = \frac{٣٤}{٢٢٥}$ (٢)

نربع معادلة (١) فينتج $\frac{١}{س^٢} + \frac{١}{ص^٢} - \frac{٢}{س ص} = \frac{٤}{٢٢٥}$ (٣)

ثم نطرح معادلة ٣ من ٢ فينتج $\frac{٢}{س ص} = \frac{٢}{١٥}$ بجمع معادلتى (٢) و (٤) فنجد $\frac{١}{س^٢} + \frac{١}{ص^٢} + \frac{٢}{س ص} = \frac{٦٤}{٢٢٥}$ نأخذ جذر الطرفين فينتج

$$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \pm \frac{٨}{١٥} \qquad (٥)$$

ومن معادلتى (١) و (٥) تتركب مجموعة باحدى الصورتين

$$\left.\begin{aligned} \frac{١}{س} - \frac{١}{ص} &= \frac{٢}{١٥} \\ \frac{١}{س} + \frac{١}{ص} &= \frac{٨}{١٥} \end{aligned}\right\} \text{ أو } \left\{\begin{aligned} \frac{١}{س} - \frac{١}{ص} &= \frac{٢}{١٥} \\ \frac{١}{س} + \frac{١}{ص} &= - \frac{٨}{١٥} \end{aligned}\right.$$

فمن المجموعة الاولى يستنتج أن $س = ٣$, $ص = ٥$ ومن الثانية يستنتج أن $س = - ٥$, $ص = - ٣$

المثال الخامس — حل المجموعة $س^٢ + س ص + ٢ ص^٢ = ٢٣$ (١)

$٢ س^٢ + س ص + ص^٢ = ٢٨$ (٢)

نأخذ مجهولا مساعدا فنفرض أن $ص = م س$ ثم نستعيض ص بهذا المقدار فى المعادلتين فينتج

$$س^٢ + م س^٢ + ٢ م^٢ س^٢ = ٢٣$$
$$٢ س^٢ + م س^٢ + م^٢ س^٢ = ٢٨$$

ثم نأخذ $س^٢$ مضروبا مشتركا فى المعادلتين فينتج

$$س^٢ (١ + م + ٢ م^٢) = ٢٣ \qquad (٣)$$
$$س^٢ (٢ + م + م^٢) = ٢٨ \qquad (٤)$$

نقسم معادلة (٣) على معادلة (٤) فينتج

$\frac{١ + م + ٢م^{٢}}{٢ + م + م^{٢}} = \frac{٢٣}{٢٨}$ وبحذف المقامين والاختصار ينتج

$٣٣ م^{٢} + ٥ م - ١٨ = ٠$ (٥)

ثم نحل هذه المعادلة فنجد $م = \frac{٢}{٣}$ أو $- \frac{٩}{١١}$

فاذا وضــع فى احدى معــادلتى (٣) , (٤) بدلا عن م المقــدار الاول $\frac{٢}{٣}$ وحلت المعادلة التى تنتج نجد $س = \pm ٣$ وبناء على هذا يكون $ص = ٢$ أو $- ٣$

واذا وضع بدلا عن م فى احدى المعادلتين المذ كورتين المقدار الثانى $- \frac{٩}{١١}$ نجد أن $س = \pm \frac{١١ \sqrt{٢}}{٤}$ وبناء عليه يكون

$ص = \frac{-٩ \sqrt{٢}}{٤}$ أو $\frac{٩ \sqrt{٢}}{٤}$

المثال السادس ـ لحل المجموعة $س^{٢} ص^{٢} + ١٤٤ = ٢٥ س ص$ (١)

$س + ص = ١٠$ (٢)

نأخذ مجهولا مساعدا فنفرض أن $س ص = ع$ فيكون $س^{٢} ص^{٢} = ع^{٢}$ ثم نستعيض المجاهيل فى معادلة (١) بهذه المقادير فينتج

$ع^{٢} + ١٤٤ = ٢٥ ع$ (٣)

وبحل هذه المعادلة نجد $ع = ١٦$ أو ٩ أى أن

$س ص = ١٦$ (٤) أو $س ص = ٩$ (٥)

ثم نكون مجموعة من معادلتى (٢) و (٤) وأخرى من معادلتى (٢) و (٥) وتحل المجموعتان المذكورتان كما تقدم فى الحالة الاولى من نمرة ٢٣٣ فبحل المجموعة الاولى منهما نجد س = ٨ و ص = ٢ أو س = ٢ و ص = ٨ وبحل المجموعة الثانية نجد س = ٩ و ص = ١ أو س = ١ و ص = ٩ فيكون للجموعة المفروضة أربعة حلول

المثال السابع — لحل المجموعة

س^{٢} ص^{٢} + ٢ س ص = ٥٤ − ٦ (س + ص)   (١)

٢ س ص + س + ص = ١٣   (٢)

نحوّل الحدود المشتملة على المجاهيل فى معادلة (١) الى الطرف الاوّل ونضرب معادلة (٢) فى ٦ فينتج

س^{٢} ص^{٢} + ٢ س ص + ٦ س + ٦ ص = ٥٤   (١)

١٢ س ص + ٦ س + ٦ ص = ٧٨   (٣)

نطرح معادلة (٣) من (١) فنجد

س^{٢} ص^{٢} — ١٠ س ص = — ٢٤ أو

س^{٢} ص^{٢} — ١٠ س ص + ٢٤ = ٠   (٤)

ثم نحل هذه المعادلة باعتبار أن مجهولها س ص فيوجد

س ص = ٤ أو س ص = ٦

فاذا وضع أحد هذين المقدارين وهو ٤ بدلا عن س ص

فى معادلة ٢ واختصر الناتج يوجد س + ص = ٥ وحينئذ يمكن تكوين المجموعة الآتية

س ص = ٤ و

س + ص = ٥

وبحل هذه المجموعة نجد س = ٤ , ص = ١ او بالعكس

واذا وضع المقدار الثانى وهو ٦ بدلا عن س ص فى معادلة (٢) يوجد س + ص = ١ وحينئذ يمكن تكوين المجموعة الآتية

س ص = ٦

س + ص = ١

وبحل هذه المجموعة نجد س = $\frac{١ + \sqrt{-٢٣}}{٢}$, ص = $\frac{١ - \sqrt{-٢٣}}{٢}$ أو بالعكس

المثال الثامن ـ لحل المجموعة

٤ س^{٢} + ٤ س ص + ٨ س + ٤ ص = ٤٥ − ص^{٢} (١)

٢ س ص − س^{٢} = ٥ (٢)

نحول جميع حدود معادلة (١) للطرف الاول ونرتبها فيحدث

٤ س^{٢} + ٤ س ص + ص^{٢} + ٨ س + ٤ ص − ٤٥ = ٠ او

(٢ س + ص)^{٢} + ٤ (٢ س + ص) − ٤٥ = ٠

وبتحليل الطرف الاول الى عاملين ينتج

(٢ س + ص + ٩) (٢ س + ص − ٥) = ٠

وحيث ان حاصل ضرب عاملين صفر فيلزم ان يكون أحدهما أو كلاهما صفرا فاما أن يكون $٢\text{س} + \text{ص} - ٥ = ٠$ (٣)

أو $٢\text{س} + \text{ص} + ٩ = ٠$ (٤)

فاذا كوّنا مجموعة من معادلتى ٢ , ٣ وهى

$$٢\text{س}\,\text{ص} - \text{س}^{٢} = ٥ \qquad (٢)$$

$$٢\text{س} + \text{ص} = ٥ \qquad (٣)$$

وحلت هذه المجموعة بأن استخرج مقدار ص من معادلة ٣ ووضع بدلا عن ص فى معادلة ٢ واختصر الناتج يوجد

$$\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١ = ٠$$

ومن هذه المعادلة نجد أن $\text{س} = ١$ وعليه يكون $\text{ص} = ٣$

واذا كوّنا مجموعة أخرى من معادلتى ٢ , ٤ وهى

$$٢\text{س}\,\text{ص} - \text{س}^{٢} = ٥ \qquad (٢)$$

$$٢\text{س} + \text{ص} = -٩ \qquad (٤)$$

وحلت هذه المجموعة بأن استخرج مقدار ص من معادلة ٤ ووضع بدل ص فى معادلة ٢ واختصر الناتج يوجد

$$٥\text{س}^{٢} + ١٨\text{س} + ٥ = ٠$$

ومن هذه المعادلة نجد أن $\text{س} = \frac{-٩ \pm ٢\sqrt{١٤}}{٥}$

وعلى هذا يكون $\text{ص} = \frac{-٢٧ \mp ٤\sqrt{١٤}}{٥}$

٢٣٧ تنبيه ـ ماتقدم ذكره من الأمثلة كاف للطالب فى حل مجموعة ولا مندوحة من استعمال طرق تحايلية أخرى ينتخبها الطالب بالقياس على ماتقدم ومدار الأمر الحصول على مجموعة يتيسر حلها بما تقدم من القواعد

تمرين ٦٢

المطلوب حل المجموعات الآتية

(١) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٤٫٥$
$س^{٢} - ص^{٢} = ١٠$

(٢) $٣س^{٢} - ٢ص^{٢} = ١٩$
$٢س^{٢} + ٥ص^{٢} = ٣٨$

(٣) $س^{٢} + ص^{٢} = ٦١$
$س ص = ٣٠$

(٤) $س^{٢} + ص^{٢} = ١٧٠$
$س ص = ١٣$

(٥) $س^{٣} - ص^{٣} = ٢١٨$
$س - ص = ٢$

(٦) $س^{٣} + ص^{٣} = ٤٠٧$
$س + ص = ١١$

(٧) $س^{٤} + س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٢٩٢٣$
$س^{٢} - س ص + ص^{٢} = ٣٧$

(٨) $س^{٤} + س^{٢}ص^{٢} + ص^{٤} = ٢١٢٨$
$س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧٦$

(٩) $\frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{ص^{٢}} = \frac{٤٦١}{٥٧٦}$
$\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = \frac{٢٩}{٢٤}$

(١٠) $\frac{١}{س^{٢}} - \frac{١}{ص^{٢}} = \frac{٧}{١٤٤}$
$\frac{١}{س} - \frac{١}{ص} = \frac{١}{١٢}$

(١١) $س^{٢} - ٣س ص + ص^{٢} + ١ = ٠$
$٣س^{٢} - س ص + ٣ص^{٢} = ١٣$

(١٢) $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٣\frac{١}{٤}$
$٢س^{٢} - ٣س ص + ٢ص^{٢} = ٢\frac{٣}{٤}$

(١٣) س^{2} ص^{2} + ٢٠ = ٩ س ص
س + ص = ٥

(١٤) س^{2} ص^{2} + س ص = ٩٣٠
س + ص = ١١

(١٥) س^{2} ص^{2} + ٢ (س + ص − س ص) = ٩٤
س ص + ٢ (س + ص) = ٢٤

(١٦) ٥ س^{2} ص^{2} + س ص + ٣ س − ٤ ص = ١٧
س ص − ٣ س + ٤ ص = ٧

(١٧) س^{2} + ٩ ص^{2} + ٦ س ص − ٦ س − ١٨ ص = ٢٧
٢ س ص − ص^{2} = ٨

(١٨) س^{2} − ١٣ س + ص^{2} − ١٣ ص + ٢ س ص + ٤٠ = ٠
٣ س ص + س^{2} − ٢٢ = ٠

تمـــرين ٦٣

مسائل تحل بمعادلات الدرجة الثانية ذات المجهولين

(١) محيط غيط مستطيل الشكل ٥٠٠ يارده ومساحته ١٤٤٠٠ يارده مربعة فما أبعاده

(٢) الفرق بين ضلعى مستطيل ٥ أمتار ومساحته ٧٥٠ مترا مربعا فما مقدار بعديه

(٣) مساحتا قطعتى أرض مربعتى الشكل ثلاثون فدانا ومحيط الكبرى يزيد ثمانين قصبة عن محيط الصغرى فما مساحة كل قطعة على حدتها

(٤) ماطول ضلعى القائمة فى مثلث قائم الزاوية اذا كان طول الوتر ١٠ أمتار والفرق بين الضلعين متران

(٥) مستقيم ا ب طوله ١٨ سنتيمترا قسم الى جزأين مختلفين ثم أنشئ على كل منهما مربع فكانت مساحة أكبر المربعين تزيد عن مساحة أصغرهما ٧٢ سنتيمترا مربعا فما مقدار كل من الجزأين

(٦) عددان لو أضيف ضعف مربع أصغرهما الى مربع الاكبر كان الناتج ٦٦ واذا طرح ثلاثة أمثال مربع أصغرهما من مربع الاكبر كان الناتج ٦١ فما هما العددان

(٧) مثلث قائم الزاوية مساحته ٧٢٦ مترا مربعا وطول وتره ٥٥ مترا فما طول ضلعي القائمة

(٨) محيط مربع يزيد عن محيط مربع آخر ١٠٠ قدم ومساحة الاكبر تزيد عن ثلاثة أمثال مساحة الاصغر ٣٢٥ قدما مربعا فما ضلع كل مربع منهما

(٩) مستطيل مساحته ٧٥٠ مترا مربعا واذا زيد طوله مترا ونقص عرضه مترا تزيد مساحته أربعة أمتار مربعة فما طول وعرض هذا المستطيل

(١٠) مستطيل مساحته ٣٠٠ متر مربع وقطره ٢٥ مترا فما بعداه

(١١) مجموع مساحتي مربعين ٨٦٢١ مترا مربعا وحاصل ضرب قطريهما ٨٥٤٠ مترا فما طول ضلع كل منهما

(١٢) عدد مركب من رقمين وهو يساوي سبعة أمثال مجموع رقميه ومربع هذا المجموع يساوي $\frac{١٢}{٧}$ من ذلك العدد فما مقداره

(١٣) الفرق بين محيطي قطعتي أرض مربعتي الشكل يعادل ربع الفرق بين سطحيهما ومجموع المحيطين يساوي ثمانية أمثال الفرق بين محيطيهما فما مساحة كل قطعة منهما

(١٤) ماهما العددان اللذان مجموع مربعيهما ١٨٥ والفرق بينهما ٣

(١٥) عدد مركب من رقمين اذا ضرب في رقم الآحاد كان الناتج ٨٤ واذا ضرب مجموع رقميه في رقم الآحاد أيضا كان الناتج ١٢ فما هذا العدد

(١٦) مستطيلان مساحة كل منهما ٣٦٠ مترا مربعا والفرق بين طوليهما ٥ أمتار وبين عرضيهما ٣٫٦ أمتار فما طول وعرض كل منهما

النسبة والتناسب

٢٣٨ النسبة هى العدد الناتج من مقارنة كمية بكمية أخرى من نوعها

ولهذه المقارنة كيفيتان الاولى أن تطرح احدى الكميتين من الاخرى فالباقى هو النسبة بينهما وتسمى نسبة عددية والمطروح منه يسمى المنسوب والمطروح يسمى المنسوب اليه

مثلا النسبة العددية بين ٧ و ٥ هى ٧ — ٥ = ٢

والنسبة العددية بين ٥ و ٧ = ٥ — ٧ = — ٢

وعموما النسبة العددية بين ح و ى هى ح — ى

الثانية أن تقسم احدى الكميتين على الاخرى فالخارج هو النسبة بينهما وتسمى نسبة هندسية والمقسوم يسمى المنسوب والمقسوم عليه يسمى المنسوب اليه

مثلا النسبة الهندسية بين ١٢ و ٤ هى ١٢ : ٤ = ٣

و « « « ٤ و ١٢ هى ٤ : ١٢ = $\frac{١}{٣}$

وعموما النسبة الهندسية بين ح و ى هى $\frac{ح}{ى}$

ولا فرق فى كل ذلك اذا كان مقدار احدى الكميتين أو كلاهما موجبا أو سالبا صحيحا أو كسريا جذريا أو غير جذرى

غير أنه اذا كان أحد الحدين غير جذرى (جذرا أصم) لا يكون مقدار النسبة حقيقيا وانما يمكن ايجاده بوجه التقريب وفى هذه الحالة تسمى الكميتان غير متناسبتين

مثلا النسبة بين $\sqrt{٢}$ و ٣ هو $\frac{\sqrt{٢}}{٣} = \frac{١٫٤١٤}{٣} = ٠٫٤٧١٣$ تقريبا
أعني أن النسبة المطلوبة محصورة بين $\frac{٤٧١٤}{١٠٠٠٠}$ و $\frac{٤٧١٣}{١٠٠٠٠}$

ومن الواضح أنه بايجاد أرقام اعشارية أكثر عددا في مقدار $\sqrt{٢}$ نحصل على درجة أقرب للحقيقة وحينئذ فيمكن ايجاد عددين صحيحين لاتختلف النسبة بينهما عن النسبة المطلوبة الا بمقدار صغير جدا بحسب الارادة ومما ذكر يستنتج التعريف الآتى

٢٣٩ النسبة العددية بين كميتين هى باقى طرح احداهما من الأخرى والنسبة الهندسية بين كميتين هى خارج قسمة احداهما على الاخرى

خواص النسب

٢٤٠ من حيث ان النسبة العددية هى باقى طرح كميتين ومعلوم أن باقى الطرح لايتغير بزيادة الكميتين أو نقصهما بمقدار واحد فيمكن أن يقال

لاتتغير النسبة العددية بزيادة الحدين أو نقصهما بمقدار واحد

∴ فالنسبة العددية بين ح , ى هى عين النسبة العددية بين ح ± هـ و ى ± هـ

ومن حيث ان النسبة الهندسية هى خارج قسمة كميتين ومعلوم أن خارج القسمة لايتغير بضرب الكميتين فى كمية واحدة ولا بقسمتهما على كمية واحدة فيمكن أن يقال

لاتتغير النسبة الهندسية بضرب الحدّين فى كمية واحدة ولا بقسمتهما على كمية واحدة فالنسبة الهندسية بين حـ و ء هى عين النسبة الهندسية بين حـ هـ و ء هـ أو بين $\frac{حـ}{هـ}$ و $\frac{ء}{هـ}$

٢٤١ اذا أضيف لحدّى نسبة هندسية كمية واحدة موجبة فيزيد مقدار النسبة أو ينقص على حسب ماتكون النسبة أصغر أو أكبر من الواحد

مثلا اذا أضيف لحدى النسبة $\frac{ا}{ب}$ كمية س ينتج $\frac{ا+س}{ب+س}$ وتكون هذه النسبة زائدة عن النسبة $\frac{ا}{ب}$ اذا كان ا < ب وتكون أقل من $\frac{ا}{ب}$ اذا كان ا > ب

البرهان نبحث عن الفرق بين $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ا+س}{ب+س}$ فنجد

$$\frac{ا}{ب}-\frac{ا+س}{ب+س}=\frac{س(ا-ب)}{ب(ب+س)}$$

فاذا كان ا < ب يكون الفرق المذكور سالبا وهذا دليل على أن $\frac{ا+س}{ب+س}$ يزيد عن $\frac{ا}{ب}$

واذ كان ا > ب يكون الفرق المذكور موجبا وهذا دليل على أن $\frac{ا+س}{ب+س}$ أقل من $\frac{ا}{ب}$

٢٤٢ اذا طرح من حدى نسبة هندسية كمية واحدة موجبة (بحيث لاتزيد عن المنسوب اليه) ينقص مقدار النسبة أو يزيد على حسب ماتكون النسبة أصغر أو أكبر من الواحد

مثلا اذا طرح من حدى النسبة $\frac{ا}{ب}$ كمية س (بفرض س < ب) ينتـــج $\frac{ا-س}{ب-س}$ تكون هذه النسبة أقل من $\frac{ا}{ب}$ اذا كان ا < ب وتكون زائدة عن $\frac{ا}{ب}$ اذا كان ا > ب

البرهان نبحث عن الفــرق بين $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{ا-س}{ب-س}$ فنجد

$$\frac{ا}{ب} - \frac{ا-س}{ب-س} = \frac{س(ب-ا)}{ب(ب-س)}$$

فاذا كان ا < ب يكون الفرق المذكور موجبا وهذا دليل على ان $\frac{ا-س}{ب-س}$ أقل من $\frac{ا}{ب}$

واذا كان ا > ب يكون الفرق المذكور سالبا وهذا دليل على ان $\frac{ا-س}{ب-س}$ يزيد عن $\frac{ا}{ب}$

٢٤٣ تنبيـــه ــ اذا كانت كمية س أكبر من ب فينعكس ماتقدم ذكره فى البند السابق فيزيد مقدار النسبة اذا كانت أصغر من الواحد وينقص اذا كانت أكبر من الواحد

٢٤٤ يمكن تجنيس النسب الهندسية وجمعها وطرحها وضربها وقسمتها بالقواعد التى أجريت على الكسور

التنـاسب

٢٤٥ التناسب هو اجتماع نسبتين متساويتين من نوع واحد فاذا كانت النسبة العذدية بين ح , ء تساوى النسبة العددية بين هـ , و فيتركب من هاتين النسبتين تناسب عددى يكتب عادة هكذا

ح . ء : هـ . و وينطبق به نسبة ح الى ء كنسبة هـ الى و

واذا كانت النسبة الهندسية بين ا , ب تساوى النسبة الهندسية بين ح , ى فيتركب من هاتين النسبتين تناسب هندسى يكتب عادة هكذا

ا : ب : : ح : ى أو هكذا $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{ى}$

و ينطق به نسبة ا الى ب كنسبة ح الى ى ومما ذكر يستنتج مايأتى

٢٤٦ التناسب العددى هو اجتماع نسبتين عدديتين متساويتين — التناسب الهندسى هو اجتماع نسبتين هندسيتين متساويتين .

٢٤٧ وسواء كان التناسب عدديا أو هندسيا فالحدّ الاول والرابع يسميان الطرفين والثانى والثالث يسميان الوسطين والاول والثالث يسميان المقدمين والثانى والرابع يسميان التاليين والحد الرابع يسمى الرابع المتناسب للثلاثة الحدود الاخرى

واذا تساوى وسطا التناسب يسمى تناسبا متصلا أو متواليا

فاذا كان ح — ى = ى — و يكتب التناسب هكذا

ح . ى : ى . و وبالاختصار هكذا ÷ ح . ى . و

والحـد ى يسمى الوسط المتناسب العددى بين ح , و

واذا كان $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ح}$ فيكتب التناسب هكذا

ا : ب : : ب : ح أو بالاختصار ∺ ا : ب : ح

والحـد ب يسمى الوسط المتناسب الهندسى بين ا , ح

وفى هذه الحالة يقال للحد الرابع الثالث المتناسب العددى أو الهندسى على حسب مايكون التناسب عدديا أو هندسيا

خواص التناسب العددى

٢٤٨ الخاصية الاولى — مجموع طرفى التناسب العددى يساوى مجموع وسطيه مثلاً فى تناسب ح . ء : هـ . و يكون ح + و = ء + هـ لأن التناسب المفروض يمكن وضعه هكذا

ح — ء = هـ — و وبتحويل ء للطرف الثانى , و للاول ينتج
ح + و = ء + هـ وهو المراد

٢٤٩ نتيجة اذا فرض أن أحد حدود التناسب الاربعة مجهول فيمكن استخراجه اذا علمت الثلاثة حدود الأخرى

لأنه يؤخذ من المتساوية السابقة أن ح = ء + هـ — و
وان ء = ح + و — هـ وهكذا

أعنى أن أحد الطرفين يساوى مجموع الوسطين ناقصا الطرف الآخر

وأن أحد الوسطين يساوى مجموع الطرفين ناقصا الوسط الآخر

واذا تساوى الوسطان مثل ح . ء : ء . هـ فيكون

٢ ء = ح + هـ أو ء = $\frac{ح + هـ}{٢}$

أعنى أن الوسط المتناسب العددى يساوى نصف مجموع الطرفين

٢٥٠ الخاصية الثانية — اذا ساوى مجموع كميتين لمجموع كميتين اخريين يتركب من الاربع كميات تناسب عددى طرفاه كميتا أحد المجموعين ووسطاه كميتا المجموع الثانى

مثلا اذا كان ح + و = ء + هـ يكون ح . ء : هـ . و

لأنه حيث كان ح + و = ى + هـ فرضا فاذا حول وللطرف الثانى و هـ للاول ينتج ح ــ ى = هـ ــ و ومن هنا يتركب التناسب ح . ى : هـ . و وهو المراد

٢٥١ تنبيـــه ـ اذا جعلنا الكميتين ح و و طرفين فلنـا أن نجعل الطرف الاول ح أو و فهاتان صورتان وفى كل منهما لنـا ان نجعل الوسط الاول ى أو هـ فيحصل أربع صور وكذا تحصل أربع صـــور أخرى اذا جعلنـا الكميتين هـ و ى طرفين وحينئذ فيمكن أن يتركب من المجموعين ثمـانية تناسبات وهى

ح . ى : هـ . و	هـ . ح : و . ى
ح . هـ : ى . و	هـ . و : ح . ى
و . ى : هـ . ح	ى . ح : و . هـ
و . هـ : ى . ح	ى . و : ح . هـ

والتناسبات الاربعة الاول تفيـد أن التناسب لا يتغير بتغيير أحد الوسطين بالآخر أو أحد الطرفين بالآخر والتناسبات الاربعـة الآخر تفيد أن التناسب لا يتغير اذا جعل فيه الطرفان محل الوسطين و بالعكس

خواص التناسب الهندسى

٢٥٢ الاولى ـ كل تناسب هنـدسى حاصل ضرب طرفيـه يساوى حاصل ضرب وسطيه

مثلا فى تناسب ا : ب : : ح : ى يكون ا ى = ب ح

لان التناسب المفروض يمكن وضعه هكذا

$\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{ى}$ وبحذف المقامين ينتج

ا ى = ب ح وهو المراد

٢٥٣ نتيجة اذا جهل أحد حدود التناسب فيمكن استخراجه من المعادلة السابقة لأنه يؤخذ منها أن ا = $\frac{ب ح}{ى}$ ، ى = $\frac{ب ح}{ا}$ ، ب = $\frac{ا ى}{ح}$ ، ح = $\frac{ا ى}{ب}$ أعنى أن أحد الطرفين فى التناسب الهنـدسى يساوى حاصل ضرب الوسطين مقسوما على الطرف الآخر وأن أحد الوسطين يساوى حاصل ضرب الطرفين مقسوما على الوسط الآخر

٢٥٤ اذا كان التناسب متصلا مثـل ∺ ا : ب : ح الذى هو عبارة عن ا : ب :: ب : ح فيؤخذ منه أن

$ب^2$ = ا ح أى ب = $\pm\sqrt{ا ح}$

أعنى أن الوسط المتناسب الهنـدسى بين كميتين يساوى الجذر التربيعى لحاصل ضربهما

٢٥٥ الخاصـية الثانية ـ اذا ساوى حاصـل ضرب كميتـين حاصل ضرب كميتين أخريين تركب من الكميات الاربع تناسب هنـدسى طرفاه عاملا أحد الحاصلين ووسطاه عاملا الحاصـل الثانى

مثلا اذا كان ا ى = ب ح فيكون ا : ب :: ح : ى

وذلك لأنه حيث كان ا ى = ب ح فرضا فبقسمة طرفى المتساوية على ى ب ينتج $\frac{ا}{ب} = \frac{ح}{ى}$ أى ا : ب :: ح : ى وهو المراد

٢٥٦ تنبيه ـ اذا جعلنا عاملى الحاصل ا ى طرفين فلنا أن نجعل الطرف الأول ا أو ى فهاتان صورتان وفى كل منهما لنا أن نجعل الوسط الأول ب أو حـ فيحصل أربع صور وكذا تحصل أربع صور أخرى اذا جعلنا عاملى الحاصل ب حـ طرفين وحينئذ يمكن أن يتركب من الحاصلين ثمانية تناسبات وتكتب بطريقة مشابهة لما تقدم فى التناسب العددى وتراعى فيها الملحوظات السابقة فيه (بنمرة ٢٥١)

٢٥٧ الخاصية الثالثة ـ اذا وجدت نسبة مشتركة فى تناسبين هندسيين يمكن أن يتركب من النسبتين الاخريين تناسب

فاذا كان ا : ب :: حـ : ى

، ا : ب :: هـ : و يكون حـ : ى :: هـ : و

وذلك لان التناسب الأول عبارة عن

$\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ى}$ (١) والثانى عبارة عن

$\frac{ا}{ب} = \frac{هـ}{و}$ (٢)

ومن هاتين المتساويتين يستنتج بداهة أن

$\frac{حـ}{ى} = \frac{هـ}{و}$ أى حـ : ى :: هـ : و

٢٥٨ نتيجة (١) اذا اتحد تناسبان فى المقدمات المتناظرة فيتركب من التوالى تناسب

مثلا اذا كان ا : ب :: حـ : ى و

ا : هـ :: حـ : و يكون ب : ى :: هـ : و

وذلك لأنه التناسب الاول يمكن وضعه كما فى نمرة ٢٥٦ هكذا

ا : حـ : : ب : ى وكذلك التناسب الثانى هكذا

ا : حـ : : هـ : و وبموجب نمرة ٢٥٧ ينتج

ب : ى : : هـ : و وهو المراد

٢٥٩ نتيجة (٢) اذا اتحد تناسبان فى التوالى المتناظرة فيمكن ان يتركب من المقدمات تناسب

مثلا اذا كان ا : ب : : حـ : ى و

هـ : ب : : و : ى فيكون ا : حـ : : هـ : و

ويستدل على ذلك كما فى النتيجة الاولى

٢٦٠ الخاصية الرابعة ـ نسبة مجموع أو فاضل الحدين الاولين الى الثانى كنسبة مجموع أو فاضل الحدين الآخرين الى الرابع

مثلا فى تناسب ا : ب : : حـ : ى يكون ا ± ب : ب : : حـ ± ى : ى

وذلك لأنه يؤخذ من تعريف التناسب أن

$\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ى}$ فاذا أضيف أو طرح من طرفى هذه المتساوية (١) ينتج

$\frac{ا}{ب} \pm ١ = \frac{حـ}{ى} \pm ١$ أو

$\frac{ا \pm ب}{ب} = \frac{حـ \pm ى}{ى}$ وهذه المتساوية يمكن أن تكتب هكذا

ا ± ب : ب : : حـ ± ى : ى

٢٦١ نتيجة (١) اذا غير موضع الوسطين فى التناسب السابق يكون

ا ± ب : ح ± ء :: ب : ء (١) ومن التناسب المفروض يؤخذ أن
ا : ح :: ب : ء وبحذف النسبة المشتركة ينتج
ا ± ب : ح ± ء :: ا : ح (٢)

والتناسبان (١) و (٢) يفيدان أن نسبة مجموع أو فاضل الحدين الاولين الى مجموع أو فاضل الحدين الآخرين كنسبة الحد الثانى الى الرابع أو الاول الى الثالث

٢٦٢ نتيجة (٢) اذا غير موضع الوسطين فى التناسب المفروض وطبق على الناتج منطوق النتيجة الاولى نجد

ا ± ح : ب ± ء :: ا : ب أو :: ح : ء

اعنى أن نسبة مجموع أو فاضل المقدمين الى مجموع أو فاضل التاليين كنسبة أحد المقدمين الى تاليه

٢٦٣ تنبيه ـ التناسب ا : ب :: ح : ء يؤخذ منه بموجب النتيجة ٢

أن ا + ح : ب + ء :: ا : ب وكذا يؤخذ منه بموجبها
أن ا ـ ح : ب ـ ء :: ا : ب ومن هذين التناسبين ينتج
ا + ح : ب + ء :: ا ـ ح : ب ـ ء

أعنى أن نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التاليين كنسبة فاضل المقدمين الى فاضل التاليين

٢٦٤ الخاصية الخامسة ـ اذا ضربت حدود تناسبات هندسية بعضها فى بعض بالترتيب يحدث من الحواصل الاربعة تناسب

مثلا اذا كان أ : ب :: حـ : ء

و هـ : و :: ح : ط

و ع : س :: ص : ن فيكون

أ هـ ع : ب و س :: حـ ح ص : ء ط ن

وذلك لأن التناسبات المفروضة يمكن أن تكتب هكذا

$\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ (١) و $\frac{\text{هـ}}{\text{و}} = \frac{\text{ح}}{\text{ط}}$ (٢) و $\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ص}}{\text{ن}}$ (٣)

و بضرب هذه المتساويات الثلاثة بعضها فى بعض ينتج

$\frac{\text{أ هـ ع}}{\text{ب و س}} = \frac{\text{حـ ح ص}}{\text{ء ط ن}}$ أى

أ هـ ع : ب و س :: حـ ح ص : ء ط ن وهو المراد

٢٦٥ تنبيه (١) اذا أخذ التناسب أ : ب :: حـ : ء مرات عـــددها م وطبق منطوق النظـرية السابقة على التناسبات الناتجة يحصـــل

$\text{أ}^{\text{م}} : \text{ب}^{\text{م}} :: \text{حـ}^{\text{م}} : \text{ء}^{\text{م}}$

أعنى ان الكميات المتناسبة قواها المتشابهة متناسبة

ويمكن أن يستدل على هذا مباشرة برفع النسبتين المتساويتين $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ و $\frac{\text{حـ}}{\text{ء}}$ الى درجة م

تنبيه (٢) اذا أخذ التناسب ا : ب :: ح : د ووضع بالصورة $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}}$ وأخذ جذر هذه المتساوية بأى درجة كانت ينتج $\frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{ا}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}} = \frac{\sqrt[\text{ن}]{\text{ح}}}{\sqrt[\text{ن}]{\text{د}}}$ أعنى أنـــ الكميات المتناسبة جذورها المتشابهة متناســـبة

٢٦٦ الخاصية السادسة ــ اذا وجدت جملة نســبة متساوية يكون نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التوالى كنسبة أى مقدم منها الى تاليـــه

مثلا اذا كان $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ح}}{\text{د}} = \frac{\text{ه}}{\text{و}} = \frac{\text{ع}}{\text{ط}}$ يكونـــ

$$\frac{\text{ا}+\text{ح}+\text{ه}+\text{ع}}{\text{ب}+\text{د}+\text{و}+\text{ط}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$

وذلك لأنه اذا رمز لمقدار كل نسبة منها بحرف ل يكون

ا = ب ل , ح = د ل , ه = و ل , ع = ط ل وبجمع هذه المتساويات ينتج

ا + ح + ه + ع = (ب + د + و + ط) ل وبقسمة طرفى هــذه المتساوية على مكرر ل ثم اســتعاضة ل باحدى النسب وليكن $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ ينتج

$$\frac{\text{ا}+\text{ح}+\text{ه}+\text{ع}}{\text{ب}+\text{د}+\text{و}+\text{ط}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}}$$ وهو المراد

تمرين ٦٤

(١) اذا كانت النسبة الهندسية بين س و ص = $\frac{٣}{٤}$ فأوجد مقدار النسبة $\frac{٥ س - ٣ ص}{٧ س - ٢ ص}$

(٢) النسبة بين كميتين هى $\frac{٥}{٨}$ واذا أضيف ٩ لحدى النسبة كانت النسبة بينهما $\frac{٨}{١١}$ فما هما الكميتان

(٣) اذا كانت النسبة بين ا و ب هى مربع النسبة $\frac{ا + س}{ب + س}$ فبرهن أن $س^٢ = ا ب$

(٤) أوجد الحد المجهول من التناسب ٥ : ٦ :: س : ٣٦

(٥) « « « « « س : ٦ :: $\frac{٥}{٨}$: ٢

(٦) ما مقدار الرابع المتناسب للكميات $\frac{٥ س}{٧}$ و $\frac{٣ ص}{٤}$ و $\frac{٢ س}{٥}$

(٧) « الوسط المتناسب بين ٣ $ص^٢$ و ١٢ $س^٢$

(٨) « الثالث المتناسب للكميتين $\frac{١}{٤}$ $س^٢$ و $\frac{١}{٦}$ $ص^٢$ س

(٩) كيف نستنتج التناسب ى : ح :: ب : ا من التناسب
ا : ب :: ح : ى

(١٠) كيف تستنتج التناسب ا : ا ± ب :: ح : ح ± ى من التناسب
ا : ب :: ح : ى

المتواليات العددية

٢٦٧ المتوالية العددية هى تتابع عدة كميات كل منها تساوى التى قبلها مضافا اليها كمية ثابتة تسمى الاساس

وهذه الكمية الثابتة اما أن تكون موجبة أو سالبة

فالاعداد ٣,٥,٧,٩,١١ تكوّن متوالية عددية تكتب هكذا

÷ ٣ . ٥ . ٧ . ٩ . ١١ فيكون أساسها ٢ أو تكتب هكذا

÷ ١١ . ٩ . ٧ . ٥ . ٣ فيكون أساسها ـ ٢

واذا فرض أن كل واحدة من الكميات ح , ى , هـ , و , ر تساوى سابقتها مضافا اليها كميـة ثابتة مثل س موجبة أو سالبة فانها تكون متوالية عددية أساسها س تكتب هكذا

÷ ح . ى . هـ . و . ر

وتقرأ المتوالية الاولى نسـبة ٣ الى ٥ كنسبة ٥ الى ٧ كنسبة ٧ الى ٩ كنسبة ٩ الى ١١ وبمثل هذا تقرأ المتواليتان الثانية والثالثة

٣٦٨ يؤخذ من تعريف المتواليـة أن الاساس هو باقى طرح أى حد منها من التالى له مباشرة

ففى المتوالية ÷ ١٩ . ٢٥ . ٣١ . ٣٧ . . . الاساس ٦

وفى المتوالية ÷ ١٩ . ١٣ . ٧ . ١ . — ٥ الاساس — ٦

تنبيه (١) اذا كانت المتوالية مبينة بأعداد فتسمى متوالية تصاعدية اذا كان الاساس موجبا وتسمى متوالية تنازلية اذا كان الاساس سالبا

فالمتواليتان السابقتان أولاهما تصاعدية والثانية تنازلية

تنبيه (٢) اذا فرض فى المتوالية ÷ ح . ى . هـ . و . ر أن الاساس س ثم عكس وضع هذه الحدود بأن كتب

÷ ر . و . هـ . ى . ح فان أساسها يكون — س

لأن أساس الاولى هو باقى طرح أى حد مثل ء من تاليه هـ أى

هـ ــ ء = س واذا غيرت اشارات هذه المتساوية تنتج

ء ــ هـ = ــ س وهذا يدل على أساس المتوالية الثانية لأنه باقى طرح الحد هـ من ء

٣٦٩ لمـا كان كل حد من حدود المتوالية العــددية يســاوى الحد الذى قبله مضافا اليــه الاســاس فاذا رمز للحد الاول بحرف ا والاساس بحرف س أمكن أن تكتب المتواليه هكذا

÷ ا . ا + س . ا + ٢ س . ا + ٣ س . ا + ٤ س . .

و بالتأمل فى هذا الوضع يشاهد أن كل حد منها يساوى الحد الاول مضافا اليه الاساس مكررا عدة مرات وان مكرر الاساس ينقص دائمـا بواحد عن رتبة الحد فالحد الرابع هو ا + ٣ س والسابع هو ا + ٦ س

واذا رمز بحرف ل للحد الاخير وبحرف ن لعدد الحدود يكون

ل = ا + (ن ــ ١) س (١)

أعنى أن الحد الاخير من متوالية عددية يساوى حدها الاول مضافا اليه حاصل ضرب الاساس فى عدد حدود المتوالية ناقصا واحدا

وهذا القانون يمكن بواسطته ايجاد مقدار أى حد من حدود المتوالية العددية اذا علم الحــد الاول والاساس وترتيب ذلك الحد فيلاحظ أن ن عدد الترتيب

مثال (١) مامقدار الحد الاخير من متوالية عددية حدها الاول ٧ وأساسها ٥ وعدد حدودها ١٢

لذلك نعوض فى القانون (١) الحروف بمقاديرها فينتج

ل = ٧ + ١١ × ٥ = ٦٢

مثال ٢ ــ مامقدار الحد الخامس عشر من المتوالية العددية ÷ ٧ . ٤ . ١ ... فهنا الاساس — ٣ وعدد الحدود ن هو ١٥ فاذا وضع فى قانون (١) بدل الحروف مقاديرها ينتج

ل = ٧ + ١٤ × — ٣ = — ٣٥

٢٧٠ تنبيه ــ القانون (١) السابق يشتمل على أربع كميات ا و ل و ن و س فاذا علم ثلاث منها أمكن ايجاد الرابعة

(مثال) ماعدد حدود المتوالية التى حدها الاول ٥ والأخير ٢٣ وأساسها $\frac{1}{2}$ ١

نضع فى قانون (١) بدل الحروف مقاديرها فينتج

٢٣ = ٥ + (ن — ١) × $\frac{1}{2}$ ١ وبحل هذه المعادلة نجد

ن = ١٣

وقس على هذا اذا جهلت احدى الكميات س و ا و ل وعلمت الثلاث الباقية

٢٧١ ادخال أواسط عددية بين كميتين معلومين هو عبارة عن ايجاد متوالية يكون الحدان المعلومان طرفين لها والأواسط المطلوبة

حدود بينهما فاذا فرض أن ا و ل الكميتان المعـلومتان وأريد ادخال أواسط بينهما عددها ط فلذلك يستخرج الاساس بواسطة قانون (١) ويلاحظ أن عدد الحدود هنا هو ط + ٢ فيكون

ل = ا + (ط + ١) س ثم نستخرج من هذه المعادلة مقدار الاساس س فيكون س = $\frac{\text{ل} - \text{ا}}{\text{ط} + 1}$ (٢)

أعنى أن الاساس يساوى باقى طرح الحد الاول من الاخير وقسمة الباقى على عدد الأواسط زائدا واحدا

(مثـال) اذا اريد ادخال سبعة أواسط عددية بين ٤ و ١٤ يطبق القانون ٢ فيكون س = $\frac{١٤ - ٤}{٨}$ = ١٫٢٥ وتكون المتوالية

÷ ٤ ٠ ٥ $\frac{1}{4}$ ٠ ٦ $\frac{1}{2}$ ٠ ٧ $\frac{3}{4}$ ٠ ٩ ٠ ١٠ $\frac{1}{4}$ ٠ ١١ $\frac{1}{2}$ ٠ ١٢ $\frac{3}{4}$ ٠ ١٤

تمـــرين ٦٥

(١) مامقدار الحـد الخامس عشر من المتوالية ÷ ٧ ٠ ١٠ ٠ ١٣ ......

(٢) « « الرابع والخمسين من المتوالية ÷ ١٣ ٠ ٢٠ ٠ ٢٧ ......

(٣) « « الثامن من المتواليـــة ÷ ٩ ٠ ٥ ٠ ١ ......

(٤) « « السابـع عشر من المتوالية ÷ ٣ ٠ $\frac{1}{2}$ ٥ ٠ ٨ ......

(٥) « « الثامن والعشرين من المتوالية ٨ ٠ $\frac{1}{4}$ ٦ ٠ $\frac{1}{2}$ ٤ ......

مامقدار الحد الاخير من المتواليات الآتية

(٦) ÷ ٦و٠ ٢و١ ٠ ٨و١ ... الى الحد الخامس والعشرين

(٧) ÷ ح — ء ٠ ح + ء ٠ ح + ٣ ء الى الحد الثلاثين

(٨) ÷ ا — ح ٠ ا — ٣ ح ٠ ا — ٥ ح الى الحد العشرين

مامقدار الحد الاول من المتواليات العددية التى فيها

(٩) الحد الاخير ٢٣ والاساس $\frac{1}{2}$ ١ وعدد الحدود ١٢

(١٠) الحد الثامن عشر ٣ والاساس ٢

(١١) الحد الخامس — ٣ والاساس — ٢

(١٢) ماأساس المتوالية التى حدها الاول ٩ والاخير ١٩ وعدد حدودها ٩

(١٣) ماأساس المتوالية التى حدها الاول ٩ والاخير — ٩ وعدد حدودها ٧

(١٤) ماعدد حدود المتوالية التى حدها الاول ٥ والاخير ٦ والاساس $\frac{1}{8}$

(١٥) ماعدد حدود المتوالية التى حدها الاول ٢٠ والاخير ٥ والاساس — $\frac{1}{2}$ ١

(١٦) ادخل عشرة أواسط عدديه بين العددين ٦ و ٦١

(١٧) ادخل خمسة اواسط عدديه بين العددين ٥٠ و — ٧

(١٨) ادخل ٢٤ وسطا عدديا بين العددين ٥ و ٨٠

(١٩) ادخل ثلاثة أواسط عدديه بين الكميتين حـ — هـ ، حـ + ٧ هـ

(٢٠) ادخل اربعة اواسط عدديه بين الكمتين م — ٥ حـ ، م

٢٧٢ مجموع أى حدين من متوالية عدديه كائنين على بعد واحد من طرفيها يساوى مجموع الطرفين

ففى المتوالية ا . ب . حـ . . . و . . . ى . ك . ل يكون

حـ + ى = ا + ل

وذلك لأن الحد حـ هو الحد الثالث من المتوالية المعلومة فاذا فرض ان أساسها س يكون

حـ = ا + ٢ س (١)

والحد ـ يمكن اعتباره حدا ثالثا من متوالية عددية حدها الاول ل وأساسها — س

فيكون ـ = ل — ٢ س (٢) وبجمع المتساوين (١) و ٢ ينتج
ح + ـ = ا + ل وهو المراد

تنبيه ـ اذا كان عدد حدود المتوالية فرديا فالحد المتوسط يساوى نصف مجموع الطرفين

لأنه اذا رمز بحرف ن′ لترتيب الحد المتوسط و فى المتوالية يكون
و = ا + (ن′ — ١) س ومن عكس المتوالية يكون
و = ل + (ن′ — ١) (— س) وبجمع المتساويتين ينتج بعد الاختصار
٢ و = ا + ل أو
و = $\frac{ا + ل}{٢}$

٢٧٣ مجموع حدود أى متواليـة عددية يساوى حاصل ضرب مجموع طرفيها فى نصف عدد الحدود

مثلا فى المتوالية ÷ ا . ب . ح . . . . و . . . . . ـ . ك . ل

اذا رمز بحرف ع لمجموع الحدود يكون ع = (ا + ل) $\frac{ن}{٢}$

وذلك لأن ع = ا + ب + ح + . . + و . . . + ـ + ك + ل

وبعكس المتوالية

يكون ع = ل + ك + ـ + . . + و . . . . + ح + ب + ا

نجمع المتساويتين

مع ملاحظة أن مجموع كل حدين متحدى الرتبة من الطرفين يساوى مجموع الطرفين وأن ضعف الحد المتوسط يساوى مجموعهما أيضا فنجد

٢ ع = ا + ل + ا + ل + ... مرات بقدر عدد الحدود أى

٢ ع = (ا + ل) ن نقسم الطرفين على ٢ فينتج

ع = (ا + ل) $\frac{ن}{٢}$ وهو المراد (٣)

تطبيق ــ ماجموع حدود المتوالية التى حدها الاول ٥ والاخير ٢٣ وعدد حدودها ٧

نستعيض فى قانون ٣ المعاليم بمقاديرها فينتج

ع = (٥ + ٢٣) $\frac{٧}{٢}$ = ٩٨

٢٧٤ تنبيه ــ القانون ٣ يشتمل على أربع كميات وهى ا و ل و ن و ع فاذا علمت ثلاث منها أمكن ايجاد الرابعة

ولنبين ذلك بأمثـلة فنقول

المثال الاول ــ الحد السادس من متوالية عددية ٢٠ ومجموع الستة حدود الاولى ٧٥ فما الحد الأول

نستعيض فى قانون (٣) المعاليم بمقادرها فينتج

٧٥ = (ا + ٢٠) $\frac{٦}{٢}$ وبحل هذه المعادلة نجد

ا = ٥

المثال الثانى ــ مامقدار الحد السادس من متوالية عددية اذا كان مجموع الستة حدود الاولى ٩٣ والحد الاول ٨

نستعيض فى قانون ٣ المعاليم بمقاديرها فينتج

٩٣ = (٨ + ل) $\frac{٦}{٢}$ وبحل هذه المعادلة نجد

ل = ٢٣

المثال الثالث ـ كم عدد حدود المتوالية التى مجموعها ٣٠٥ والاول منها ٨ والاخير ٥٣

نستعيض فى قانون ٣ المعاليم بمقاديرها فينتج

٣٠٥ = (٨ + ٥٣) $\frac{ن}{٢}$ وبحل هذه المعادلة نجد

ن = ١٠

٢٧٥ اذا وضع فى قانون ٣ السابق بدل الحـــد الاخير مقـداره المبين بنمرة ٢٦٩ ينتج

ع = $\frac{ن}{٢}$ [٢ أ + (ن − ١) س] (٤)

وهـذا القانون يمكن بواسطته ايجاد مجموع حدود المتوالية العددية اذا علم الحد الاول والاساس وعدد الحدود

(مثـال) مامجموع الخمســة عشر حدا الاولى من المتواليــة

÷ ١٣ ، ١٦ ، ١٩ . . .

نضع فى قانون ٤ بدل الحروف المعلومة مقاديرها فنجد

ع = $\frac{١٥}{٢}$ (٢ × ١٣ + ١٤ × ٣) او

ع = ٥١٠

٢٧٦ تنبيــه ــ القانون (٤) يشتمل على أربع كميــات وهى
ع و ن و ا و س

فاذا علمت ثلاث منها أمكن ايجاد الكمية الرابعة ولنبين ذلك بأمثلة فنقول

المثال الاول ــ مامقدار الحــد الاول من متواليــة عددية اذا كان مجموع الخمسة حدود الاولى ٧٠ والاساس ٣

نضع فى قانون ٤ بدل المعاليم مقاديرها فنجد

$$\text{٧٠} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}\left(\text{٢ ا} + \text{٤} \times \text{٣}\right)$$ ومنه

$$\text{ا} = \text{٨}$$

المثال الثانى ــ ماهى المتوالية المكونة من خمسة حدود مجموعها ٥٥ وأولهــا ١٧ نستخرج الاساس ولذلك

نستعيض فى قانون ٤ المعاليم بمقاديرها فينتج

$$\text{٥٥} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}}\left(\text{٢} \times \text{١٧} + \text{٤ س}\right)$$ وبحل هذه المعادلة نجد

$$\text{س} = -\text{٣}$$

وحينئذ فتكون المتوالية ÷ ١٧ . ١٤ . ١١ . ٨ . ٥

المثال الثالث ــ كم حدا تؤخذ من المتوالية ÷ ١٥ . ١٢ . ٩ ... ليكون مجموعها ٤٢

نستعيض فى قانون (٤) المعاليم بمقاديرها فيكون

$$\text{٤٢} = \frac{\text{ن}}{\text{٢}}\left[\text{٢} \times \text{١٥} + (\text{ن} - \text{١})(-\text{٣})\right]$$ او

$$\text{٨٤} = \text{ن}\left(\text{٣٠} - \text{٣ ن} + \text{٣}\right)$$ أو

$$\text{٨٤} = \text{٣٣ ن} - \text{٣ ن}^{\text{٢}}$$ أو

٣ ن^{٢} — ٣٣ ن — ٨٤ = ٠ نقسم حدود المعادلة على ٣

ن^{٢} — ١١ ن — ٢٨ = ٠ نحلل الطرف الاول الى عاملين

(ن — ٣) (ن — ٧) = ٠ وحينئذ

ن = ٤ أو ن = ٧

وعلى الاول تكون المتوالية ÷ ١٥ ٬ ١٢ ٬ ٩ ٬ ٦ وعلى الثانى تكون المتوالية ١٥ ٬ ١٢ ٬ ٩ ٬ ٦ ٬ ٣ ٬ صفر ٬ — ٣

٢٧٧ القوانين ١ و ٣ و ٤ تشتمل على خمس كميات فاذا علم ثلاث منها أمكن ايجاد الكميتين الأخريين اما بايجادهما كمية بعد كمية بواسطة أحد القوانين المذكورة واما بتكوين مجموعة ذات معادلتين وحل هذه المجموعة ولنذكر هنا بعض أمثلة على ذلك فنقول

المثال الاول ـ الحد الخامس من متوالية هو ٣٠ والحد الخامس والعشرين منها هو ١٧٠ والمطلوب ايجاد الحد الاول والاساس

نأخذ قانون (١) الخاص بالحد الاخير ونستبدل فيه أولا ل و ن — ١ بالمقدارين ٣٠ و ٤ ثم بالمقدارين ١٧٠ و ٢٤ فنجد المجموعه

٣٠ = ا + ٤ س (١)

١٧٠ = ا + ٢٤ س (٢)

وبحل هذه المجموعة نجد ا = ٢ و س = ٧ وتكون المتوالية المطلوبة ÷ ٢ ٬ ٩ ٬ ١٦ ٬ ٢٣ ٬ ٣٠ ...

المثال الثانى ــ مجموع ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية هو ٢١ وحاصل ضربها هو ٢٣١ فما كل حد من هذه الحدود الثلاثة

نفرض أن الحد المتوسط منها هو ح والاساس س فيكون ماقبل الحد المتوسط هو $\text{ح} - \text{س}$ ومابعده هو $\text{ح} + \text{س}$ ويكون مجموع الثلاثة حدود هو $\text{ح} - \text{س} + \text{ح} + \text{ح} + \text{س} = ٣\,\text{ح}$ أى أن

$$٣\,\text{ح} = ٢١ \qquad (١)$$

ويكون حاصل ضرب الثلاثة حدود المذكورة هو

$\text{ح}\,(\text{ح} - \text{س})(\text{ح} + \text{س}) = \text{ح}\,(\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢})$ أى أن

$$\text{ح}\,(\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢}) = ٢٣١ \qquad (٢)$$

ومن (١) و ٢ تتكون المجموعة

$$٣\,\text{ح} = ٢١ \qquad (١)$$

$$\text{ح}\,(\text{ح}^{٢} - \text{س}^{٢}) = ٢٣١ \qquad (٢)$$

ولحل هـذه المجموعة نستخرج مقـدار ح من معادلة (١) فنجد $\text{ح} = ٧$ ثم نضع هذا المقدار بدلا عن ح فى معادلة ٢ فينتج

$$٧\,(٤٩ - \text{س}^{٢}) = ٢٣١$$ أو

$$٤٩ - \text{س}^{٢} = ٣٣$$ وبحل هذه المعادلة نجد

$$\text{س} = \pm ٤$$

أعنى أن الحد المتوسط ٧ والاساس ٤ أو -٤

فاذا كان الاساس ٤ يكون الحد الاول ٧ — ٤ = ٣ والثالث ٧ + ٤ = ١١

واذا كان الاساس — ٤ يكون الحد الاول ٧ + ٤ = ١١ والثالث ٧ — ٤ = ٣

المثال الثالث عدد حدود متوالية ١٥ ومجموع الثلاثة حدود المتوسطة ٧٥ ومجموع الثلاثة حدود الاخيرة ١٢٩ فما هى المتوالية

لذلك نستخرج الحد الاول والاساس فيقال الثلاثة حدود المتوسطة هى السابع والثامن والتاسع والثلاثة حدود الاخيرة هى الثالث عشر والرابع عشر والخامس عشر وبناء على قانون (١) يكون

الحد السابع = ا + ٦ س	الحد الثالث عشر = ا + ١٢ س
« الثامن = ا + ٧ س	« الرابع « = ا + ١٣ س
« التاسع = ا + ٨ س	« الخامس « = ا + ١٤ س

فيكون مجموع الثلاثة حدود المتوسطة هو ٣ ا + ٢١ س وحيث انه يساوى ٧٥ فتحدث المعادلة ٣ ا + ٢١ س = ٧٥ (١)

ويكون مجموع الثلاثة حدود الاخيرة هو ٣ ا + ٣٩ س وحيث انه يساوى ١٢٩ فتحدث المعادلة ٣ ا + ٣٩ س = ١٢٩ (٢)

وبحل المجموعة المكونة من (١) و (٢) نجد

س = ٣ , ا = ٤ وتكون المتوالية

÷ ٤ . ٧ . ١٠ . ١٣ .....

وقس على هذه الامثلة

تمرين ٦٦

(١) ما مجموع الخمسة عشر حدا الاولى من متوالية عددية حدها الاول ٤ والخامس عشر ٣٢

(٢) مامجموع العشرين حدا الاولى من متوالية عددية حدها الاول ½ والاخير عشرة

(٣) مجموع ثمانية الحدود الاولى من متوالية عددية ٢٢٠ وحدها الثامن ٤٥ فما مقدار الحد الاول

(٤) ما مقدار الحد الاول من متوالية عددية اذا كان حدها الثامن ٤ ومجموع الثمانية حدود الاولى منها ٤

(٥) مجموع خمسة الحدود الاولى من متوالية عددية هو ½٧١ والاول ١١ فما هو الحد الخامس

(٦) مامقدار الحد العاشر من متوالية عددية حدها الاول ١٥ ومجموع العشرة حدود الاولى منها ٦٠

(٧) مجموع حدود متوالية عددية ١٩٥ والحد الاول منها ٢٠ والاخير ٤٥ فكم عدد حدودها

(٨) كم عدد حدود المتوالية العددية التى مجموع حدودها ١٠ وحدها الاول ١٠ والاخير — ٦

(٩) مامجموع حدود المتوالية ÷ ٤٢ ، ٣٩ ، ٣٦ ... الى الحد العاشر

(١٠) « « « ÷ —١٦ ، —١٠ ، —٤ ... الى الثانى عشر

(١١) مجموع خمسة الحدود الاولى من متوالية عددية هو ٣٥ وأساسها ٢ فما هو الحد الاول

(١٢) مجموع ستة الحدود الاولى من متوالية هو ٤٠ وأساسها ٣ فما مقدار الحد الاول

(١٣) الحد الاول من متوالية عددية ١ ومجموع خمسة الحدود الاولى منها ٥٥ فما مقدار الاساس

(١٤) الحد الاول من متوالية عددية هو ١٢ ومجموع خمسة الحدود الاولى ٣٥ فما مقدار الاساس

(١٥) ماعدد الحدود التى تؤخذ من المتوالية ÷ ٣٩·٣٦·٣٣ . . . . . ليكون مجموعها ٢٧٣

(١٦) ماعدد الحدود التي يلزم أخذها من المتوالية
÷ — ١٦ · — ١٥ · — ١٤ ... ليكون مجموعها — ١٠٠

(١٧) ما مقدار الحد الاول والأساس من المتوالية العددية التى حدها الخامس عشر ٢٥ والتاسع والعشرون ٤٦

(١٨) مامقدار الحد الاول والأساس من المتوالية التى حدها الخامس واحد والسادس والثلاثون — ٧٧

(١٩) مجموع ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية هو ٢٤ وحاصل ضربها ٤٤٠ فما كل من هذه الحدود الثلاثة

(٢٠) مجموع ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية هو ٦ وحاصل ضربها — ٢٤ فما هذه الحدود الثلاثة

(٢١) مجموع الثلاثة حدود المتوسطه من متوالية عددية هو ٤٢ ومجموع الثلاثة حدود الاخيرة ١٣٢ وعدد حدودها ١٣ والمطلوب ايجاد الحد الاول والأساس

(٢٢) مجموع الثلاثة حدود المتوسطة من متوالية عددية هو ١٥ ومجموع الثلاثة حدود الاخيرة — ٣ وعدد حدودها ١٥ والمطلوب تكوين هذه المتوالية

(٢٣) مامجموع الاعداد الصحيحة من واحد الى ألف

(٢٤) مجموع ثلاثة أعداد مكونة لمتوالية عددية هو ٣٩ وحاصل ضربها ٢١٨٤ فما هي هذه الثلاثة أعداد

(٢٥) بين أن مجموع جملة أعداد فردية متتالية مبتدأة بالواحد وعددها م يساوى $م^2$

(٢٦) خيول مختلفة الاثمان ثمن كل حصان يزيد عن الاول منه ثمنا بمقدار ٣٣٠ قرشا وأقل الاثمان ٧٥٠ قرشا فما ثمن الحصان الخامس عشر

(٢٧) فرقة من العملة اتفقت مع شخص على حفر بئر بأجرة الذراع الاول فى العمق ١٠ قروش وأن تزاد أجرة كل ذراع عن سابقه بمقـدار ٥ قروش فا مقدار ماتستحقه الفرقة اذا بلغ عمق البئر ١٦ ذراعا

(٢٨) مامقدار الدين الذى يمكن تسديده فى مدة ١٢ سنة اذا دفع للدائن منه فى السنة الاولى ٤٠٠ فرنك وفى الثانية ٥٠٠ فرنك وهكذا بزيادة ١٠٠ فرنك فى كل سنة عن سابقتها

(٢٩) وفر رجل من ايراده مبلغ ٤٠٥٠ فرنك فى مدة ١٥ سنة فوفر فى السنة الاولى ٢٠٠ فرنك وكان توفيره فى كل سنة يزيد عن سابقتها بمقدار ثابت والمطلوب معرفة مقدار زيادة الوفر السـنوى

(٣٠) شخص ابتدأ فى الخدمة بمرتب سـنوى ١٤٤ جنيها ويزيد مرتبه السنوى ٢٤ جنيها بعـد كل سنتين ويحجز منه ٥ ٪ من مرتبـه لمعاش التقاعد فا مقـدار مايصل اليه مرتبه السنوى اذا خدم ٢٠ سـنة وما مقدار مايحجز منه فى هـذه المدة

المتواليـات الهندسية

٢٧٨ المتوالية الهندسـية هى كميات متتابعـة كل منها تساوى سابقتها مضروبة فى كمية ثابتة تسمى الأساس

والأساس اما أن يكون كمية صحيحة أو كسرية موجبة أوسالبة

فالكميات ٣ و ٦ و ١٢ و ٢٤ تكوّن متوالية هندسية تكتب هكذا

$\because$ ٣ : ٦ : ١٢ : ٢٤ وأساسها ٣

والاعداد ١ و $-\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{16}$ و $-\frac{1}{64}$ تكون متوالية هندسه تكتب هـكذا

$\because$ ١ : $-\frac{1}{4}$: $\frac{1}{16}$: $-\frac{1}{64}$ وأساسها $-\frac{1}{4}$

واذا فرض أن كلا من الكميـات ح ، د ، هـ ، و ، م تساوى سابقتها مضروبة فى كمية ثابتــة مثل سـ (صحيحة أو كسرية موجبة أو سالبة) فانها تكوّن متوالية هندسية تكتب هكذا

∺ ح : د : هـ : و : م

وتقرأ المتواليـة الاولى نسبة ٣ الى ٦ كنسبة ٦ الى ١٢ كنسبة ١٢ الى ٢٤ وبمثل هذا تقرأ المتواليتان الثانية والثالثة

٢٧٩ يؤخذ من تعريف المتوالية الهندســية أن الاساس عبارة عن خارج قسمة أى حد منها على الحد الذى قبله مباشرة

ففى المتوالية ∺ ٥ : — ١٠ : ٢٠ : — ٤٠ الاساس $\frac{-١٠}{٥}$ = — ٢

وفى المتوالية ∺ ٤٥ : ١٥ : ٥ : ١ $\frac{٢}{٣}$ ... الأساس $\frac{٥}{١٥}$ = $\frac{١}{٣}$

٢٨٠ اذا رمز للحد الاول بحرف ا والأساس بحرف سـ فبناء على تعريف المتوالية الهندسية يكون

∺ ا : ا سـ : ا $سـ^{٢}$: ا $سـ^{٣}$: ا $سـ^{٤}$ .... وبالتأمل فى هذا الوضع يشاهد أن كل حد هو عبـارة عن الحد الاول مضروبا فى قوة من قوى الأساس مبينة برتبة هذا الحد ناقصا واحدا واذا رمز للحد الاخير بحرف لـ ولعدد الحدود بحرف ن يكون

$$ل = ا\,سـ^{ن-١} \qquad (١)$$

وهذا القانون يمكن بواسطته ايجاد مقدار أى حد من حدود المتوالية الهندسية اذا علم الحد الاول والأساس وترتيب الحد

مثال (١) الحد الاخير من متوالية هندسية حدها الاول ٣ وأساسها ٢ وعدد حدودها ٥ هو

$$٣ \times ٢^{٤} = ٤٨$$

مثال (٢) الحد الرابع من المتوالية التى حدها الاول ٣ وأساسها $-\frac{١}{٣}$ هو $٣ \times \left(-\frac{١}{٣}\right)^{٣} = -\frac{١}{٩}$

مثال (٣) الحد السادس من المتوالية ∵ ٣٢ : ٨ : ٢ ... (الأساس $\frac{١}{٤}$) هو $٣٢ \times \left(\frac{١}{٤}\right)^{٥} = \frac{١}{٣٢}$

٢٨١ تنبيه ـ قانون (١) السابق يشتمل على الاربع كميات ا و ل و س و ن فاذا علم ثلاث منها أمكن ايجاد الرابعة

فاذا كان المجهول ا فيستخرج منه $ا = \frac{ل}{س^{ن-١}}$

واذا كان المجهول س فيستخرج منه $س = \sqrt[ن-١]{\frac{ل}{ا}}$

واذا كان المجهول ن فيؤخذ من ذلك القانون أن

$\frac{ل}{ا} = س^{ن-١}$ ثم يؤخذ لوغاريتم الطرفين

فيكون لول ــ لوا = (ن ــ ١) لوس يقسم الطرفين على لوس

$$\frac{لول - لوا}{لوس} = ن - ١ \quad \text{أو}$$

$$ن = \frac{لول - لوا}{لوس} + ١$$

تطبيق ما عدد حدود المتوالية اذا كان حدها الاول ٥ والاخير ٥١٢٠ والأساس ٢

نضع فى القانون السابق بدل الحروف مقاديرها فينتج

$$\text{ن} = \frac{\text{لو }٥١٢٠ - \text{لو }٥}{\text{لو }٢} + ١$$ وبايجاد مقادير هذه اللوغارتمات

ينتج $$\text{ن} = \frac{٣٫٧٠٩٢٧ - ٠٫٦٩٨٩٧}{٠٫٣٠١٠٣} + ١$$ أو

$$\text{ن} = ١١$$

٢٨٣ ادخال أواسط هندسية بين كميتين معلومتين هو عبارة عن تكوين متوالية هندسية طرفاها الكميتان المعلومتان وعدد حدودها يساوى عدد الأواسط زائدا اثنين

فلادخال أواسط هندسية عددها ط بين الكميتين ح , ب تكوّن متوالية هندسية حدها الاول ح والأخير ب وعدد حدودها ط + ٢

ولذلك نستخرج الاساس بان يوخذ قانون (١) من نمرة ٢٨٠ وهو $\text{ل} = \text{ا}\,\text{س}^{\text{ن}-١}$ وتستعاض فيه الكميات ل , ا , ن ــ ١ بالكميات ح و ب , ط + ١ فينتج

$$\text{ح} = \text{ب}\,\text{س}^{\text{ط}+١}$$ ومنه

$$\text{س} = \sqrt[\text{ط}+١]{\frac{\text{ح}}{\text{ب}}}$$

أعنى أن الاساس يساوى خارج قسمة الكميتين المعلومتين مأخوذا جذره بدرجة تساوى عدد الاواسط زائدا واحدا

تطبيق ـ المطلوب ادخال أربعة أواسط هندســية بين الكميتين ١٦٠ , ٥ لذلك نعوض فى مقـدار الاساس السابق بيانه الحروف بمقاديرها فينتج

$$س = \sqrt[٥]{\frac{٥}{١٦٠}} = \sqrt[٥]{\frac{١}{٣٢}} = \frac{١}{٢}$$

وتكون الاواسط هى ٨٠ و ٤٠ و ٢٠ و ١٠

٢٨٣ ايجاد مجموع حدود متوالية هندسية ـ اذا فرض أن الحد الاول من المتواليــة ا وأساسها س وعدد حدودها ن ورمز لمجموع الحدود بحرف ع يكون

$$ع = ا + ا\,س + ا\,س^{٢} + ا\,س^{٣} + \dots\dots ا\,س^{ن-٢}$$
$$+ ا\,س^{ن-١} \quad (١)$$

وبضرب طرفى هذه المتساوية فى الاساس ينتج

$$ع\,س = ا\,س + ا\,س^{٢} + \dots\dots\dots ا\,س^{ن-٢}$$
$$+ ا\,س^{ن-١} + ا\,س^{ن} \quad (٢)$$

وبطرح متساوية (١) من (٢) مع الاختصار يحدث

$ع\,(س - ١) = ا\,(س^{ن} - ١)$ نقسم الطرفين على $س - ١$

فينتج $ع = \frac{ا(س^{ن} - ١)}{س - ١}$ (٢)

وبواسطة هذا القانون يحسب مجموع حدود المتوالية الهندسية

وحيث ان ل = ا $س^{ن-1}$ فيمكن كتابة قانون (٢) هكذا

$$ع = \frac{س ل - ا}{س - ١}$$

وهو وضع مفيد فى بعض الاحوال

٢٨٤ تنبيه (١) اذا غيرنا اشارات البسط والمقام فى قانون (٢)

ينتج $ع = \frac{ا(١ - س^{ن})}{١ - س}$ (٣)

ومن الموافق استعمال قانون (٣) فى ايجاد مجموع الحدود مالم يكن الاساس موجبا واكبر من الواحد

مثال (١) المطلوب ايجاد مجموع ستة الحدود الاولى من المتوالية

∴ ٥ : ١٥ : ٤٥ ...

نستعمل قانون (٢) ونلاحظ أن الاساس ٣ فينتج

$$ع = \frac{٥(٣^{٦} - ١)}{٣ - ١} = \frac{٥ \times ٧٢٨}{٢} = ١٨٢٠$$

مثال (٢) المطلوب ايجاد مجموع خمسة الحدود الاولى من المتوالية

∴ ٤٨ : ٢٤ : ١٢ ....

هنا الاساس $\frac{١}{٢}$ فيستعمل قانون ٣ ومنه ينتج

$$ع = \frac{٤٨\left[١ - (\frac{١}{٢})^{٥}\right]}{١ - \frac{١}{٢}}$$ أو

$$ع = ٩٣$$

مثال (٣) المطلوب ايجاد مجموع سبعة الحدود الاولى من المتوالية

$$∺ \ \tfrac{٣}{٥} \ : \ -١ \ : \ \tfrac{٥}{٣} \ \ldots\ldots$$

هنا الاساس $-١ : \frac{٣}{٥} = -\frac{٥}{٣}$ فيستعمل قانون ٣ ومنه ينتج

$$\text{ع} = \frac{\frac{٣}{٥}\left[١-\left(-\frac{٥}{٣}\right)^{٧}\right]}{١-\left(-\frac{٥}{٣}\right)} \quad \text{او}$$

$$\text{ع} = \frac{\frac{٣}{٥}\left[١-\left(-\frac{٧٨١٢٥}{٢١٨٧}\right)\right]}{١+\frac{٥}{٣}} \quad \text{أو}$$

$$\text{ع} = \frac{\frac{٣}{٥}\left(١+\frac{٧٨١٢٥}{٢١٨٧}\right)}{\frac{٨}{٣}} \quad \text{أو}$$

$$\text{ع} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٨٠٣١٢}{٢١٨٧} \times \frac{٣}{٨} \quad \text{او}$$

$$\text{ع} = ٨\,\frac{٣١٩}{١٢١٥}$$

٢٨٥ تنبيه (٢) تقدم أن مجموع حدود المتوالية الهندسية يمكن ان يبين بالقانون $\text{ع} = \frac{\text{ا}(١-\text{سـ}^{\text{ن}})}{١-\text{سـ}}$ وهذا القانون يمكن وضعه هكذا $\text{ع} = \frac{\text{ا}}{١-\text{سـ}} - \frac{\text{ا}\,\text{سـ}^{\text{ن}}}{١-\text{سـ}}$

فاذا فرضنا أن سـ كسر أقل من الواحد يشاهد أنه كلما زادت كمية ن تصغر قيمة $\text{سـ}^{\text{ن}}$ وعلى هذا تصغر قيمة $\frac{\text{ا}\,\text{سـ}^{\text{ن}}}{١-\text{سـ}}$

فاذا زادت كمية ن تدريجيا بكيفية مستمرة يكبر الفرق بين الكسرين شيأ فشيأ ويقرب من المقدار $\frac{\text{ا}}{١-\text{سـ}}$ ويكون عند النهاية مساويا له أى أن

$$\text{ع} = \frac{\text{ا}}{١-\text{سـ}} \qquad (٤).$$

أعنى أن مجموع حدود متوالية الهندسية تنازلية غير متناهية فى عدد الحدود يساوى خارج قسمة حدها الاول على باقى طرح الاساس من الواحد

مثال (١) ليكن المطلوب ايجاد مجموع حدود المتوالية

$$\div\div\ ١ : \frac{١}{٢} : \frac{١}{٤} : \frac{١}{٨} : \frac{١}{١٦} \cdots\cdots$$

نضع فى قانون (٤) بدل الحروف مقاديرها فنجد

$$ع = \frac{١}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢$$

مثال (٢) المطلوب ايجاد مقدار الكسر $٠{,}\dot{٢}\dot{٧}$

يلاحظ أن هـذا الكسر عبارة عن $\frac{٢٧}{١٠٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠٠٠٠}$ وهكذا الى مالا نهاية فهو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية غير متناهية حدها الاول $\frac{٢٧}{١٠٠}$ وأساسها $\frac{١}{١٠٠}$ فاذا رمز لمجموع حدودها بحرف ع نجد بناء على قانون (٤)

$$ع = \frac{\frac{٢٧}{١٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{٢٧}{١٠٠} : \frac{٩٩}{١٠٠} = \frac{٢٧}{٩٩}$$

وهذا هو المقدار المقرر فى علم الحساب

مثال (٣) المطلوب ايجاد مقدار الكسر ٠٫٤٢٧ (بتكرار ٢٧)

يلاحظ أنه عبارة عن $\frac{٤}{١٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠٠٠} + \frac{٢٧}{١٠٠٠٠٠٠٠}$
وهكذا الى مالا نهاية أى $\frac{٤}{١٠}$ مضافا الى مجموع حدود متوالية هندسية غير متناهية حدها الاول $\frac{٢٧}{١٠٠٠}$ وأساسها $\frac{١}{١٠٠}$ ويكون

$$٠٫٤\dot{٢}\dot{٧} = \frac{٤}{١٠} + \frac{\frac{٢٧}{١٠٠٠}}{١ - \frac{١}{١٠٠}} = \frac{٤}{١٠} + \frac{٢٧}{٩٩٠} = \frac{٤ \times ٩٩ + ٢٧}{٩٩٠} = \frac{٤٢٣}{٩٩٠}$$

واذا لاحظنا أن ٩٩ = ١٠٠ — ١ يكون

$$٠٫٤\dot{٢}\dot{٧} = \frac{(١٠٠ - ١)٤ + ٢٧}{٩٩٠} = \frac{٤٠٠ - ٤ + ٢٧}{٩٩٠} = \frac{٤٢٧ - ٤}{٩٩٠}$$

وهو عين القانون المعروف فى علم الحساب

تمـــرين ٦٧

(١) مامقدار الحد العاشـــر من المتوالية ∺ ٥ : ١٠ : ٢٠ ...

(٢) « « الثانى عشر « « ∺ ٨١ : — ٢٧ : ٩ ....

(٣) « « الذى ترتيبه ح « « ∺ $س : س^٣ : س^٥$ ...

(٤) « « الاول من متوالية هندسية حدها العاشر ٣٨٤ وأساسها ٢

(٥) « « « « « « « السابع $\frac{١}{٦٤}$ والاساس — $\frac{١}{٢}$

(٦) اذا كان الحد الاول من متوالية $\frac{١}{٢٧}$ والحد العاشر ٧٢٩ فما مقدار الاساس

(٧) ماعدد حدود المتوالية الهندسية التى حدها الاول $\frac{١}{٤}$ والاخير ١٠٢٤ وأساسها ٤

(٨) أدخل أربعة أواسط هندسية بين ٤٨٦ و ٢

(٩) أدخل ســتة أواسط هندسيه بين ٥٦ و — ٧/١٦

(١٠) مامقدار مجموع ستة الحدود الاولى من المتوالية ∴ ١ر٥ : ٣ ...

(١١) مامقدار مجموع ثمانية الحدود الاولى من المتوالية ∴ ٢/٣ : — ٢ : ٦ ...

(١٢) مامقدار مجموع عشرة الحدود الاولى من المتوالية ∴ ١/٢١٦ : ١/٧٢ : ١/٢٤

(١٣) مامقدار مجموع الاثنى عشر حدا الاولى من المتوالية ∴ ١ : — ١/٢ : ١/٤ ..

(١٤) مامجموع حدود المتوالية الهندسية غير المتناهية ∴ ٩ : ٦ : ٤ ...

(١٥) » » » » » ∴ ١/٣ : ٢/٩ : ٤/٢٧ ...

(١٦) أوجد مقادير كل من الكسور الآتية

٠ر٦ ٠ر٨٣ و ٠ر٢٤ و ٠ر٣٨٧ و ٠ر٠٣٧

(١٧) كوّن المتوالية الهندسية التى حدها العاشر ٣٢٠ والسادس ٢٠

(١٨) » » » » » » الخامس ٢٧/١٦ والتاسع ١/٣

(١٩) » » » » » » السابع ٦٢٥ والرابع — ٥

(٢٠) دكان لعب وأدوات للاطفال بها أشياء مرتبة الاثمان ترتيبا تدريجيا فثمن الشئ من النوع الاول ٢ر٥ مليم ومن الثانى ٥ مليمات ومن الثالث ١٠ مليمات وهكذا بالتضعيف فما ثمن شيئين من النوع الثالث وثلاثة أشياء من النوع السادس وصنف من النوع العاشر

(٢١) ابتدأ شخص فى التجارة برأس مال قدره ٧٥٠٠ جنيه وكان يجد ان ماله فى آخر كل سنة قد زاد بقدر ١/٥ مايكون فى أول السنة فما مقدار ماوصل اليه ماله فى نهاية عشر سنين

(٢٢) شخص قبل أن يبيع بيته المشيد بمبلغ $\frac{\text{ج}}{١٢٥}$ بشرط أن ياخذ من المشترى غير ذلك مليما واحـد فى أول يوم من الشهر ومليمين فى اليوم الثانى وأربع مليمات فى اليوم الثالث وهكذا الى آخر الشهر الذى كان مقداره ٣٠ يوما فما مقدار ثمن المنزل

(٢٣) اذا فرض أن حبة القمح لو زرعت ينتج منها ٥٠ حبة ولو زرعت الخمسون حبة ينتج من كل منها ٥٠ حبة وهكذا مامقدار عـدد القمح المتحصل من ذلك فى نهاية اثنى عشرة سنة

التراتيب والتبـاديل والتوافيق

٢٨٦ اذا فرضت أشياء عددها م فانه يطلق اسم تراتيب هـذه الاشياء نونا نونا على الجمل المختلفة التى يمكن تكوينها من هذه الاشياء بأخذها نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة من حيث الانتخاب والوضع فيختلف كل ترتيبين اما بجنس شئ واحد على الاقل واما بوضع بعض هذه الاشياء

فاذا رمز لثلاثة أشياء مختلفة بالحروف ا , ب , حـ فتراتيبها مثنى هى الجمـل التى تنشأ من أخذ كل حرفين مرة وملاحظة اختـلاف وضعهما فيكون

ا ب , ا حـ , ب ا , ب حـ , حـ ا , حـ ب

وكيفية ذلك أننا كتبنا الحرف الاول ا وبعده ب مرة , حـ مرة أخرى ثم كتبنا الحرف الثانى ب وبعده ا مرة , حـ مرة أخرى ثم كتبنا الحرف الثالث حـ وبعده ا مرة , ب مرة أخرى

فكل ترتيبين يختلفان اما فى الحرفين المكونين لهما أو فى ترتيب وضعهما

وإذا رمز لاربعة أشياء بالحروف ا و ب و ح و د فتراتيبها ثلاثى هى الجمل التى تنشأ من أخذ كل ثلاثة حروف معا وملاحظة اختلاف أوضاعها فيكون

ا ب ح و ا ب د و ا ح ب و ا ح د و ا د ب و ا د ح

ب ا ح و ب ا د و ب ح ا و ب ح د و ب د ا و ب د ح

ح ا ب و ح ا د و ح ب ا و ح ب د و ح د ا و ح د ب

د ا ب و د ا ح و د ب ا و د ب ح و د ح ا و د ح ب

وكيفية ذلك أننا كتبنا الحرف ا مشتركا مع كل واحد من التراتيب مثنى للحروف ب و ح و د ثم كتبنا الحرف ب مشتركا مع كل واحد من التراتيب مثنى للحروف ا و ح و د وهكذا كتبنا الحرفين ح و د وكل واحد من هذه التراتيب يخالف غيره اما فى حرف أو فى موضع حرف على الاقل

وعلى العموم اذا رمز لعدد الاشياء كلها بحرف م ولعدد الاشياء المكونة لكل ترتيب بحرف ن تبين التراتيب بالرمز $ر^{م}_{ن}$

٢٨٧ ايجاد عدد التراتيب ـ اذا فرضت أشياء عددها م مبينة بحروف فمن الواضح أن تراتيبها واحدا واحدا يؤدى الى تراتيب عددها م فيكون $ر^{م}_{ا} = م$

ولايجاد عدد تراتيب هذه الحروف مثنى يقال اذا جعل حرف منها هو الاول فانه يتركب منه ومن كل واحد من الحروف

الاخرى التى عددها م — ١ تراتيب عددها م — ١ ومن حيث انه يمكن أن يجعل كل حرف من الحـروف التى عددها م هو الاول فيتكوّن بهذا الاعتبار تراتيب عددها م (م — ١) أى

$$ر^{م}_{٢} = م\,(م - ١)$$

ولايجاد تراتيب هذه الحروف ثلاثى يقال اذا جعل حرف منها هو الاول وكتب بعده على التوالى التراتيب مثنى للحروف التى عددها م — ١ فنحصل على تراتيب بقدر عدد التراتيب مثنى المذكورة وحيث ان عدد التراتيب مثنى للحـروف التى عددها م — ١ هو (م — ١) (م — ٢) فيكون هذا المقدار هو عدد التراتيب التى فيها أحد الحروف هو الاول وحيث انه يمكن الحصول على مقدار هذه التراتيب عند الابتداء بكل حرف من الحروف التى عددها م فيكون عدد التراتيب ثلاثى هو

$$ر^{م}_{٣} = م\,(م - ١)\,(م - ٢)$$

و بالاستمرار على ذلك يرى أن التراتيب رباعى لحروف عددها م يبين بالمقدار م (م — ١) (م — ٢) (م — ٣)

و بالقياس على ذلك يوجد عدد التراتيب خمسة خمسة وستة ستة وهكذا

وعلى هذا يكون $ر^{م}_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ١٢٠$

ولبيان أن هذه القاعدة حقيقية مهما كان عدد الحروف الكلية وعدد الحروف التى تؤخذ فى كل ترتيب يقال

اذا فرض تكوين التراتيب نونا نونا لحروف عددها م فلا بد أن يوجد فى هذه التراتيب جملة تراتيب مبتدأة بحرف مخصوص والتراتيب التى تبتدأ بهذا الحرف تتألف منه ومن تراتيب الحروف التى عددها م — ١ ويشتمل كل منها على حروف عددها ن — ١ وحينئذ فعدد التراتيب التى تبتدأ بهذا الحرف المخصوص هو عين عدد هذه التراتيب ويبين بالرمز $\text{ر}^{\text{م}-1}_{\text{ن}-1}$ وحيث انه يمكن ايجاد مثل هذه التراتيب مع كل حرف من الحروف التى عددها م باعتباره هو الاول فيكون عدد التراتيب كلها هو م $\text{ر}^{\text{م}-1}_{\text{ن}-1}$ أى

$$\text{ر}^{\text{م}}_{\text{ن}} = \text{م}\ \text{ر}^{\text{م}-1}_{\text{ن}-1}$$

وهذا القانون حقيق مهما كان م , ن فاذا وضع فيه بدل م , ن على التوالى م — ١ , ن — ١ ثم م — ٢ , ن — ٢ وهكذا بطرح ١ و٢ و٣ .... الى ن — ١[1] ينتج

(١) يلاحظ أن لايطرح من ن عدد مساو له حتى لاينعدم وحينئذ فأكبر عدد يمكن طرحه من ن هو ن — ١ أعنى أن أقل مقدار يعطى الى ن هو ن — (ن — ١) = ن — ن + ١ وهذا عبارة عن أخذ حرف واحد فى كل ترتيب ويقابله فى كمية م المقدار م — (ن — ١) أى م — ن + ١ والوضع الذى قبله هو ن — (ن — ٢) = ن — ن + ٢ ويقابله م — ن + ١

$$ر^{م}_{ن} = م\ ر^{م-١}_{ن-١}$$

$$ر^{م-١}_{ن-١} = (م-١)\ ر^{م-٢}_{ن-٢}$$

$$ر^{م-٢}_{ن-٢} = (م-٢)\ ر^{م-٣}_{ن-٣}$$

. . . .

. . . .

$$ر^{م-ن+٢}_{ن-ن+٢} = (م-ن+٢)\ ر^{م-ن+١}_{م-ن+١}$$

$$ر^{م-ن+١}_{ن-ن-١} = م-ن+١$$

فاذا ضربت هذه المتساويات بعضها فى بعض طرفا بطرف ثم قسم طرفا المتساوية الناتجة على عوامل الطرف الاولى ماعدا العامل الاول منهـا ينتـــج

$$ر^{م}_{ن} = م(م-١)(م-٢)(م-٣)\cdots(م-ن+١) \quad (١)$$

أعنى أنـ عدد التراتيب لاشياء مختلفة مهما كان عددها بحيث يشتمل كل منها على أشياء منها بقدر مايراد يسـاوى حاصل ضرب عوامل بقدر عدد الاشياء المأخوذة فى كل ترتيب وهذه العوامل هى أعداد متتالية أكبرها بقدر عدد الاشياء جميعها

فعلى هذا يكون $ر^{٥}_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$

مثال (١) ثلاثة أشخاص دخلوا عربة سكة حديدية بها ستة محلات خالية فبكم كيفية يمكن أن يجلسوا بهذه المحلات

عدد الكيفيات المطلوبة هو عبارة عن عدد التراتيب ثلاثى لستة أشياء

اى ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠

مثال (٢) كم عدد مركب من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الارقام التسعة البسيطة

الاعداد المطلوبة هى عبارة عن التراتيب مثنى لتسعة أشياء فعددها

٩ × ٨ = ٧٢

مثال (٣) ماعدد الاعداد التى يمكن تكوينها باستعمال ستة أرقام مختلفة من الارقام التسعة البسيطة

الاعداد المطلوبة هى عبارة عن التراتيب ستة فستة لتسعة أشياء

فعددها ٩ × ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ = ٦٠٤٨٠

٢٨٨ التباديل — يطلق اسم تباديل لاشياء عددها م على الجمل المختلفة التى يمكن تكوينها من هذه الاشياء بحيث ان كل تبديل يحتوى عليها ولا يختلف كل تبديلين الا برتبة وضع بعض هذه الاشياء

فاذا رمز لشيئين مختلفين بحرفى ا و ب كان تبديلهما ا ب و ب ا
واذا رمز لثلاثة أشياء مختلفة بحروف ا و ب و ح كانت تباديلها هى
ا ب ح و ا ح ب و ب ا ح و ب ح ا و ح ب ا و ح ا ب

فكل تبديل منها يشتمل على ا و ب و ح غير أنها مختلفة فى الوضع

وعلى العموم اذا رمز لعـــدد الاشياء بحرف م وللتباديل بحرف ل فتبين التباديل بالرمز $ل^{م}$

٢٨٩ ايجـــاد عدد التباديل ــ اذا تأملنا فى تعريف التباديل نجد أن التباديل لاشـــياء عددها م هو عبارة عن تراتيب هذه الاشياء مأخوذة ميمـــا ميمـــا أعنى ان

$$ل^{م} = {}^{م}ر_{م}$$

ومن حيث ان ${}^{م}ر_{م} = م\,(م - ١)\,(م - ٢)\,\ldots$ عوامل بقدر م فيكون $ل^{م} = م\,(م - ١)\,(م - ٢)\,(م - ٣)\,\ldots\ldots ٣ \times ٢ \times ١$ أو

$$ل^{م} = ١ \times ٢ \times ٣ \ldots\ldots \times م \qquad (٢)$$

أعنى أن عدد التباديل لاشياء مختلفة مهما كان عددها يساوى حاصل ضرب عدة عوامل مكونة من الاعداد الصحيحة المتتالية مبتدأة من الواحد ومنتهية بعدد الاشياء

فعلى هذا يكون $ل^{٥} = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ١٢٠$

مثال (١) ماعدد الكيفيات التى يمكن أن يشغل رجلان محلين فى عربة نرمز لهما بحرفى ب و ح فيكون $ل^{٢} = ١ \times ٢ = ٢$

وفى الواقع أن الشخص الاول اما أن يشـــغل المحل الاول (جهة اليمين مثلا) فحينئذ يشغل الثانى المحل الثانى واما أن يشغل الشخص الثانى المحل الاول وحينئذ فيشغل الشخص الاول المحل الثانى

مثال (٢) بكم كيفية يمكن أن يجلس امين و بيومى وجاد على ثلاثة كراسى نمرها ١ و ٢ و ٣

الكيفيات التى يجاسون بها عبارة عن تباديل ثلاثة أشياء

أى $ل_٣ = ١ × ٢ × ٣ = ٦$

مثال (٣) ماعدد الكيفيات التى يشغل فيها أربعة من عساكر الشرطة أربع نقط مختلفة

عدد الكيفيات المطلوبة عبارة عن عدد تباديل أربعة أشياء

أى $ل_٤ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ = ٢٤$

مثال (٤) ماعدد الاعداد التى يمكن تشكيلها بخمسة أرقام معنوية مختلفة

الاعداد المطلوبة عبارة عن التباديل لخمسة أشياءفعددها

$ل_٥ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ = ١٢٠$

٣٩٠ التوافيق ـ يطلق اسم توافيق لاشياء عددها م نونا نونا على الجمل المختلفة التى يمكن تكوينها من هذه الاشياء بأخذها نونا نونا بجميع الكيفيات الممكنة من حيث انتخابها فكل جملتين تختلفان بجنس شئ واحد على الاقل

(ولايعتبر هنا ترتيب مواضع الاشياء)

فاذا رمز لثلاثة أشياء مختلفة بالحروف ا و ب و ح كانت توافيقها مثنى هى ا ب و ا ح و ب ح

لأن كل مجموعة منها مركبة من حرفين مخالفين للحرفين المركب منهما أى مجموعة أخرى منها

واذا رمزنا لاربعة أشياء مختلفة بالحروف ا و ب و ح و ى فان توافيقها ثلاثى هى ا ب ح و ا ب ى و ا ح ى و ب ح ى (على أن لها أربعة وعشرين ترتيبا)

وعلى العموم اذا رمز لعدد أشياء بحرف م ولعدد الاشياء التى يتكون منها كل توفيق بحرف ن تبين التوافيق المطلوبة بالرمز $ق^{م}_{ن}$

٢٩١ ايجاد عدد التوافيق ـ اذا فرض وجود التوافيق نونا نونا لحروف عددها م ثم أجرى على كل توفيق منها تباديله كان الناتج هو عدد التراتيب لتلك الحروف نونا نونا أعنى

$$\text{أن}\qquad ر^{م}_{ن} = ق^{م}_{ن} \times \lfloor ن$$

$$\text{ومنه ينتج}\quad ق^{م}_{ن} = \frac{ر^{م}_{ن}}{\lfloor ن} \qquad \text{أو}$$

$$ق^{م}_{ن} = \frac{م(م-١)(م-٢)\cdots(م-ن+١)}{١ \times ٢ \times ٣ \cdots م} \qquad (٣)$$

أعنى أن عدد التوافيق لاشياء عددها م مأخوذة نونا نونا يساوى عدد تراتيبها نونا نونا مقسوما على عدد التباديل للاشياء التى عددها ن

مثال (١) بكم كيفية يمكن وضع نوعين من الفاكهة على مائدة من ثلاثة أصناف من الفواكه

عدد الكيفيات المطلوبة هو عبارة عن عدد التوفيق مثنى لثلاثة أشياء

أى $^{٣}ق_{٢} = \frac{٣ \times ٢}{١ \times ٢} = ٣$

مثال (٢) كم كلمة ثلاثية الحروف يمكن تركيبها من سبعة أحرف مختلفة بدون وجود جميع حروف أى كلمة فى أخرى

عدد الكلمات المطلوبة هو عبارة عن عدد التوافيق ثلاثى لسبعة أشياء

أى $^{٧}ق_{٣} = \frac{٧ \times ٦ \times ٥}{١ \times ٢ \times ٣} = ٣٥$

مثال (٣) بكم كيفية يمكن أن يصرح رئيس مصلحة باجازة لثلاثة من العمال البالغ عددهم عشرة

عدد الكيفيات المطلوبة عبارة عن عدد التوافيق ثلاثى لعشرة أشياء

أى $^{١٠}ق_{٣} = \frac{١٠ \times ٩ \times ٨}{١ \times ٢ \times ٣} = ١٢٠$

٢٩٣ نتيجة ـ اذا ضرب البسط والمقام فى قانون التوافيق (٣) فى الكمية $\underline{|م-ن}$ ينتج

$$^{م}ق_{ن} = \frac{م(م-١)(م-٢)\cdots\cdots(م-ن+١)\underline{|م-ن}}{\underline{|ن} \times \underline{|م-ن}}$$

وبملاحظة أن البسط فى هذه الحالة يصير عبارة عن تباديل م يكون

$$^{م}ق_{ن} = \frac{\underline{|م}}{\underline{|ن} \times \underline{|م-ن}} \qquad (٤)$$

أعنى أن عدد التوافيق نونا نونا لحروف عددها م يساوى عدد تباديلها مقسوما على حاصل ضرب تباديل عددها ن فى تباديل عددها م ـ ن

فعلى هذا يكون $^{٧}ق_{٥} = \frac{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ١ \times ٢} = ٢١$

٢٩٣ تنبيـــه قد يراد ايجـاد عدد التوافيق لاشـياء ولا يذكر فى منطوق السؤال نفس عددها أو عدد ما يؤخذ منها فى كل مرة وانمـا يعلم ذلك من مفهوم السؤال كما فى الامثال الآتية

مثال (١) ماعدد الكيفيات التى يمكن أن ينتخب فى كل منها أربعة أشخاص من عشرة بحيث يؤخذ شخص معين فى كل مرة

بمـا أن الشخص المعين يلزم انتخابه فى كل مرة فيكون الانتخـاب الحقيقى هو ٣ من تسعة وبحسب قانون التوافيق يكونــ

$$ {}^{٩}ق_{٣} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧}{١ \times ٢ \times ٣} = ٨٤ $$

مثال (٢) ماعدد الطرق التى ينتخب فيها أربعة أشخاص من عشرة بحيث يترك شخص معين فى كل مرة

بمـا أن الشخص المعين لا ينتخب فى أى مرة فيكون عدد الانتخاب الحقيقى هو ٤ من ٩ وبحسب قانون التوافيق يكون

$$ {}^{٩}ق_{٤} = \frac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} = ١٢٦ $$

٢٩٤ نظرية ـ عدد التوافيق لاشياء عددها م نونا نونا يساوى عدد التوافيق لهـا م ــ ن فى كل مرة

وذلك لانه عند انتخاب أى توفيق من التوافيق المطلوبة المشتملة على أشياء عددها ن نترك أشـياء عددهـا م ــ ن ولاختـلاف الاشـياء جميعها تكون الاشياء المتروكة عبارة عن توفيق مكوّن من أشياء عددها م ــ ن وحيث ان كل مجموعــة (توفيق) مكوّنة من ن أشياء يقابلها مجموعة (توفيق) مناظر لها تشتمل على أشياء عددها م ــ ن فتتضح النظرية

ومع ذلك فيمكن اثبات هذه النظرية بايجاد عدد التوافيق بمقتضى القانون العام نمرة ٢٩٢ و بمقتضى ماذكر بنمرة ٢٩٤ فنجد

$$^{م}ن_{ك} = \frac{م!}{ك! \times (م-ك)!} \qquad (٢٩٢)$$

$$^{م}ن_{م-ك} = \frac{م!}{(م-ك)! \times ك!} \qquad (٢٩٤)$$

وحيث ان المقدارين متساويان فيكون $^{م}ن_{ك} = {}^{م}ن_{م-ك}$

وهذه النظرية تستعمل لاختصار الحساب اذا كان عدد الاشياء التى تنتخب فى كل مرة أكبر من نصف عدد الاشياء كلها

مثال ــ ماعدد الطرق التى ينتخب فيها ٧ رجال من عشرة

أولا على حسب قانون التوافيق العام يكون

$$^{١٠}ن_{٧} = \frac{٤\times٥\times٦\times٧\times٨\times٩\times١٠}{٧\times٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ١٢٠$$

و بحسب قانون نمـرة (٢٩٤) يكون عدد التوافيق سـبعة سبعة لعشرة أشياء هو عين عدد التوافيق لها (١٠ — ٧) أى ثلاثة ثلاثة فيكون $^{١٠}ن_{٣} = \frac{٨\times٩\times١٠}{٣\times٢\times١} = ١٢٠$

وهو عين ما استنتج بالقانون العام

٢٩٥ تنبيــه (١) قد يســتعمل قانون التوافيق مركبا فى حل بعض مسائل وسنوضح ذلك بالمثالين الآتيين

مثال (١) من جميعه مركبة من ستة مصريين و ٤ أوروباويين يراد تكوين لجنة بها خمسة أعضاء يكون بها اثنان من الاوروباويين فبكم طريقة تتركب اللجنة

من الواضح أن يدخل فى اللجنــة ثلاثة مصريون ينتخبون من ستة فعدد الكيفيات التى ينتخبون بها يبين بالمقدار

$${}^{٦}ق_{٣} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣}$$

وعدد الكيفيات التى ينتخب بها الاورباويون يبين بالمقدار

$${}^{٤}ق_{٢} = \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٢}$$

ومن حيث انه يستصحب مع كل كيفية من الكيفيات الاولى كيفية من الثانية فيكون عدد الكيفيات التى تتألف بها اللجنة هو

$${}^{٦}ق_{٣} \times {}^{٤}ق_{٢} = \frac{٦ \times ٥ \times ٤}{١ \times ٢ \times ٣} \times \frac{٤ \times ٣}{١ \times ٢} = ١٢٠$$

مثال (٢) من جمعية مركبة من سبعة مصريين و ٤ أوروباويين يراد تكوين لجنة بها ستة أعضاء بحيث يكون بها اثنان من الاوروباويين على الاقل فما عدد الكيفيات التى يمكن أن تركب بها اللجنة

اللجنة المطلوبة تكوّن ممـا يأتى

أولا من ٢ أوروباويين و ٤ مصريين

ثانيا من ٣ « و ٣ مصريين

ثالثا من ٤ « و ٢ مصريين

ومجموع النتائج الثلاث هو عدد الكيفيات المطلوبة وبناء على هذا فعدد طرق الانتخاب هو

$$ {}^{٤}\text{ن}_{٢} \times {}^{٧}\text{ن}_{٤} + {}^{٤}\text{ن}_{٣} \times {}^{٧}\text{ن}_{٣} + {}^{٤}\text{ن}_{٤} \times {}^{٧}\text{ن}_{٢} = $$

$$ \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٢}\,\underline{|٢}} \times \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٣}\,\underline{|٤}} + \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٣}} \times \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٤}\,\underline{|٣}} + ١ \times \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٢}\,\underline{|٥}} = $$

$$ ٢١٠ + ١٤٠ + ٢١ = ٣٧١ $$

ولم نستعمل فى هذين المثالين قانون التراتيب لانه لم يشترط شئ فى ترتيب أعضاء اللجنة فيما بينهم

٢٩٦ تنبيه (٢) قد يستعمل أيضا قانون التوافيق مركبا ثم نجرى التباديل على الناتج فبذلك تتكون تراتيب بحالة خصوصية كما فى المثال الآتى

من سبعة أحرف مهملة وأربعة معجمة كم عدد الكلمات الرباعية التى يمكن تركيبها بحيث يكون فى كل كلمة حرفان مهملان وحرفان معجمان

الكيفيات التى تنتخب بها الحروف المهملة هى التوافيق مثنى لسبعة حروف والكيفيات التى تنتخب بها الحروف المعجمة هى التوافيق مثنى لاربعة حروف وحيث ان كل انتخاب من الاول يستصحب انتخابا من الثانى فيكون عدد الانتخابات المذكورة هو

$$ {}^{٧}\text{ن}_{٢} \times {}^{٤}\text{ن}_{٢} = \frac{\underline{|٧}}{\underline{|٢} \times \underline{|٥}} \times \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٢} \times \underline{|٢}} $$

وزيادة على ذلك فبما أن كل كيفية تحتوى على خمسة حروف ويمكن تبديلها فيكون عدد الكلمات المطلوبة هو

$$\frac{\underline{|٧}}{\underline{|٥} \times \underline{|٢}} \times \frac{\underline{|٤}}{\underline{|٢} \times \underline{|٢}} \times \underline{|٤} = ٣٠٢٤$$ كلمه

وبدقة التأمل يرى أن ذلك عبارة عن تراتيب رباعية مأخوذة بكيفيات مخصوصة

٢٩٧ عدد التباديل المكررة الاشـياء ــ لايجـاد عدد التباديل لاشياء عددها م بفرض أن منها أشياء عددها ن متساوية ومنها أشياء أخرى عدد ع متساوية وأشياء ثالثة عددها ك متساوية أيضا وباقى الاشـــياء مختلفة يقال

نرمز للأشياء بحروف عددها م ونفرض أن الحروف التى عددها ن كل منها ا والحروف التى عددها ع كل منها ب والحروف التى عددها ك كل منها ح وأن باقى الحروف مختلفة ومخالفة لكل من ا و ب و ح ثم نرمز لعدد التباديل المطلوبة بحرف س ويقال اذا أخذنا تبديلا من التى عددها س واستعيضت فيه الحروف التى عددها ن وكل منها ا بحروف مختلفة ومخالفة لجميع الحروف الاخرى المشتمل عليها التبديل المذكور ثم أجريت تباديل فيه على الحروف التى عددها ن مع بقـاء الحروف الاخرى فى مواضعها فانا نحصل على تباديل عددها $\underline{|ن}$ وحيث أنه يمكن اجراء مثل هــذه التباديل فى جميع التباديل التى عددها س فنحصل على تباديل عددها س × $\underline{|ن}$

ثم اذا أخذنا أحد هذه التباديل الاخيرة واستعيضت فيه الحروف التى عددها ع وكل منهـا ب بحروف مغايرة لجميع الحروف الاخرى المشتمل عليها هــذا التبديل ثم أجريت تباديل فيه على الحروف التى عددها ع مع بقاء بقية الحروف فى مواضعها فانا نحصل منه على تباديل عددها $\underline{|ع}$ وحيث انه يمكن أن نحصل على مثل هذه التباديل من كل واحد من التباديل التى عددها $س \times \underline{|ن}$ فنحصل حينئذ على تباديل عددها $س \times \underline{|ن} \times \underline{|ع}$

واذا أخذ واحد من التباديل المذكورة واستعيضت فيه الحروف التى عددها ك وكل منها ح بحروف متغايرة ومغايرة للحروف الاخرى التى فيه ثم أجريت تباديل على الحروف التى عددها ك مع بقاء الحروف الاخرى فى مواضعها فاننا نحصل منه على تباديل عددها $\underline{|ك}$

وحيث انه يمكن الحصول على مثل هذه التباديل من كل واحد من التباديل التى عددها $س \times \underline{|ن} \times \underline{|ع}$ فنحصل على تباديل عددها $س \times \underline{|ن} \times \underline{|ع} \times \underline{|ك}$ وحيث انه فى هذه الحالة صارت الحروف كلها مختلفة فتكون هذه التباديل هى نفس التباديل التى تنتج من الحروف م فى حالة ماتكون كلها مختلفة أى $\underline{|م}$ وحينئذ يكون

$$س \times \underline{|ن} \times \underline{|ع} \times \underline{|ك} = \underline{|م}$$ ومنــــه

$$س = \frac{\underline{|م}}{\underline{|ن} \times \underline{|ع} \times \underline{|ك}} \qquad (٤)$$

مثال (١) كم عدد الكلمات التى يمكن تكوينها من جميع أحرف كلمة مشمش أحرف كلمـة مشمش ٢ م و ٢ ش وعلى حسب القانون يكون عدد تباديلها هو $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\times\lfloor 2}=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times1\times2}=6$

مثال (٢) ماعدد الكلمات التى يمكن تركيبها من جميع أحرف كلمة مدريد

أحرف كلمـة مدريد هى ٢ د و م و ر و ى وعدد تباديلهـا على حسب القانون هو

$$\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}=\frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2}=60$$

مثال (٣) ماعدد الكلمات التى يمكن تركيبها من جميع أحرف كلمة قسطنطينيه

أحرف كلمة قسطنطينية هى ٢ ط و ٢ ن و ٢ ى و ق و س وهـ وعدد تباديلها على حسب قانون (٤) هو

$$\frac{\lfloor 9}{\lfloor 2\times\lfloor 2\times\lfloor 2}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9}{1\times2\times1\times2\times1\times2}=45360$$

مثال (٤) ماعدد الاعداد التى يمكن ايجـادها من الارقام ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٢ و ١ بحيث ان الارقام الفردية تشغل منازل فردية

الارقام الفردية ١و٣و٣و١ تشغل الاربع منازل الفردية من كل عدد بطرق عددها $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2\times\lfloor 2}$ (٤) والارقام الزوجية ٢ و ٤ و ٢ تشغل أربع منازل زوجية من كل عدد بكيفيات عددها $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ (٤)

وكل كيفية من كيفيات الاعداد الفردية تستصحب كل كيفية من كيفيات الاعداد الزوجيــة فيكون عدد الاعداد المطلوب يساوى

$$\frac{٤!}{٢! \times ٢!} \times \frac{٣!}{٢!} = ٦ \times ٣ = ١٨$$

٢٩٨ لايجاد عدد التراتيب لاشــياء عددها م نونا نونا فى حالة ماذا كان يمكن تكرار كل شئ مرة أو مرتين أو ثلاث مرات وهكذا الى مرات عددها ن فى كل ترتيب

نفرض لزيادة ايضاح المقصود من هذه القاعدة أن لدينا محلات عددها ن ويوجد أشــياء مختلفة عددها م وأنه يراد اشغال المحلات التى عددها ن باشياء تنتخب من التى عددها م بحيث يمكن أن يكرر الشئ المنتخب مرة أو مرتين أو ثلاثا وهكذا الى ن مرات فما عدد التراتيب الممكنة فلذلك يقال

الموضع الاول يمكن أن نشغله بمقدار م كيفيات وحينما نشغل هذا الموضع بأى كيفية منها فالمحل الثانى يمكن أن نشغله بمقدار م كيفيات ايضا (لانه ليس محظورا علينا أن نشغله بشئ من مثل ماشغل به الموضع الاول) وبناء عليه فعدد الكيفيات التى يمكن أن نشغل بها المحل الاول والثانى هو م $\times$ م $=$ $م^{٢}$ والموضع الثالث يمكن أن نشغله بمقدار م كيفيات مع كل كيفية من الكيفيات السابقة وبناء عليه فالمحلات الثلاثة يمكن أن تشغل بمقدار $م^{٣}$ وبالاستمرار على ذلك يمكن اشــغال المحال بمقادير $م^{٤}$ و $م^{٥}$ وهكذا ويرى أن أس م هو عين عدد المحلات التى أشغلت فينتج من ذلك أن عدد طرق اشغال ن محلات هو $م^{ن}$

مثال (١) ماعدد الكيفيات التى بها يمكن لرئيس مصلحة أن ينتخب اثنين موظفين فى وظيفتين مختلفتين من ثلاثة أنواع من راغبي التوظف الاول من الحاصلين على شهادة الحقوق الثانى من الحاصلين على شهادة البكالوريا ــ الثالث من مرفوتى الحكومة

هنا م عدد أنواع الاشياء المنتخب منها ٣ , ن عدد المحلات اثنان فعلى حسب القانون السابق يكون عدد الكيفيات هو ٣^٢ = ٩

ولزيادة البيان نرمز للحقوقى بحرف ح وللحاصل على البكالوريا بحرف ك وللمرفوت بحرف ف فيكون الجدول الآتى

الوظيفة الأولى	ح	ح	ح	ك	ك	ك	ف	ف	ف
« الثانية	ح	ك	ف	ك	ح	ف	ف	ح	ك
الكيفيات	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

مثال (٢) بكم طريقة يمكن أن نوزع خمس جوائز مختلفة لاربعة أولاد

هنا م عدد الاولاد ٤ و ن عدد الجوائز ٥ وبحسب القانون تكون الكيفيات هى ٤^٥ = ١٠٢٤ كيفية ولزيادة الايضاح نقول الجائزة الاولى يمكن أن ينالها الولد الاوّل أوالثانى أو الثالث أو الرابع فلها أربع كيفيات

ومع كل من هذه الكيفيات فتوزيع الجائزة الثانية عليهم اما أن ينالها الاول أو الثانى أو الثالث أو الرابع

فعدد الاحتمالات التى يمكن أن تعطى فيها الجائزتان هى ٤ × ٤ أى ٤^٢

وفى كل حالة من هذه الاحوال فعند توزيع الجائزة الثالثة يكون لها أربع كيفيات فعدد الاحتمالات التى يمكن أن تعطى بها الثلاث جوائز هى $٤^{٣} = ٦٤$ وبالتبعية فأربع جوائز تعطى بكيفيات عدد $٤^{٤} = ٢٥٦$ وخمس جوائز تعطى بكيفيات عدد $٤^{٥} = ١٠٢٤$ كيفية

٢٩٩ لايجاد قيمة ن فى الحالة التى يكون فيها عدد التوافيق لاشياء عددها م مأخوذة نونا نونا أكبر مايمكن يقال

معلوم أن $$\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}} = \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)\cdots(\text{م}-\text{ن}+٢)(\text{م}-\text{ن}+١)}{١\times٢\times٣\cdots(\text{ن}-١)\text{ن}}$$

وأن $$\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}-١} = \frac{\text{م}(\text{م}-١)(\text{م}-٢)\cdots(\text{م}-\text{ن}+٢)}{١\times٢\times٣\cdots(\text{ن}-١)}$$

وحينئذ يكون $$\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}} = \text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}-١} \times \frac{\text{م}-\text{ن}+١}{\text{ن}}$$

والكمية $\frac{\text{م}-\text{ن}+١}{\text{ن}}$ يمكن كتابتها $\frac{\text{م}+١}{\text{ن}} - ١$

فكلما كانت هذه الكمية أكبر من الواحد يكون المقدار $\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}}$ أكبر من $\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}-١}$ غير أنه كلما زاد مقدار ن يصغر العامل المذكور فاذا أعطى الى ن القيم ١ , ٢ , ٣ , ... على التوالى نجد أن المقدار $\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}}$ يأخذ فى زيادة مستمرة حتى يؤل العامل $\frac{\text{م}+١}{\text{ن}} - ١$ الى الواحد واذا زاد ن عن ذلك يؤل العامل المذكور الى قيمة أقل من الواحد وهنالك يأخذ المقدار $\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}}$ فى النقص وحينئذ فلاجل أن يكون $\text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}} > \text{م}\,\text{ق}_{\text{ن}-١}$ يجب أن يكون

$$\frac{\text{م}+١}{\text{ن}} - ١ > ١ \quad \text{أو} \quad \frac{\text{م}+١}{\text{ن}} > ٢ \quad \text{أو} \quad \frac{\text{م}+١}{٢} > \text{ن}$$

ولايجاد المقادير التى تحقق هذا التباين يقال

أولا ـ اذا كان م عددا زوجيا وفرض أنه يساوى ٢ ح فيكون

$$\frac{م+١}{٢} = \frac{٢ح+١}{٢} = ح + \frac{١}{٢}$$

فيتحقق التباين السابق بكل مقدار يعطى الى ن من ١ الى ح وحينئذ فمتى كان ن = ح أى $\frac{م}{٢}$ يكون أكبر عدد التوافيق هو $ق^{م}_{\frac{ن}{٢}}$ أعنى أن أكبر عدد التوافيق لاشياء زوجية هو الذى يكون فيه عدد الاشياء المنتخبة فى كل توفيق يساوى نصف عدد الاشـياء الكلية

ثانيـا ـ اذا كان م فرديا ولنفرض أنه يساوى ٢ ح + ١

فيكون $\frac{م+١}{٢} = \frac{٢ح+٢}{٢} = ح + ١$

فيتحقق التباين السابق بكل مقدار يعطى الى ن من ١ الى ح وحينئذ فمتى كان ن = ح + ١ فالعامل الذى يضرب فيه يصير مساويا للواحد ويكون

$$ق^{م}_{ح+١} = ق^{م}_{ح}$$

وحيث فرض أن م = ٢ ح + ١ فيكون ح = $\frac{م-١}{٢}$ و ح + ١ = $\frac{م+١}{٢}$ وحينئذ يكون

$$ق^{م}_{\frac{م+١}{٢}} = ق^{م}_{\frac{م-١}{٢}}$$

أى أن عدد التوافيق لاشياء فردية عددها م يكون أكبر مايمكن اذا كان عدد الاشياء المأخوذة فى كل مرة يساوى نصف المقدار

الناتج من اضافة واحد الى عدد الاشياء كلها أو نصف الباقى من طرح واحد من عدد الاشياء كلها

مثـال (١) أكبر عدد التوافيق لاشـــياء عددها ٨ هى التوافيق المركبة من ٤ أشياء منها أى

$$٧٠ = \frac{٥\times٦\times٧\times٨}{٤\times٣\times٢\times١} = ق^{٨}_{٤}$$

وأما $$٥٦ = \frac{٤\times٥\times٦\times٧\times٨}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ق^{٨}_{٥}$$

مثـال (٢) أكبر عدد التوافيق لاشـياء عددها ٩ هى المأخوذة بمقدار $\frac{٩+١}{٢}$ أو $\frac{٩-١}{٢}$ أى المركبة من خمسة أو المركبة من أربعة

اعنى $$١٢٦ = \frac{٥\times٦\times٧\times٨\times٩}{٥\times٤\times٣\times٢\times١} = ق^{٩}_{٥}$$

و $$١٢٦ = \frac{٦\times٧\times٨\times٩}{٤\times٣\times٢\times١} = ق^{٩}_{٤}$$

وأما $ق^{٩}_{٦}$ فيساوى $\left(\frac{٦\times٥\times٤\times٣\times٢\times١}{٤\times٥\times٦\times٧\times٨\times٩}\right) = ٨٤$

تمـــرين ٦٨

(١) أوجد عدد التراتيب ثلاث لاربعة أشياء ثم عدد التراتيب سداس لسبعة أشياء ثم عدد التراتيب ثلاث عشرة ثلاث عشرة لخمسة عشر شيأ

(٢) أوجد عدد تباديل ٧ أشياء و ٩ أشياء و ١١ شيأ

(٣) أوجد عدد التوافق خماس ثم سباع ثم تساع لاحد عشر شيأ

(٤) ماعدد التراتيب ثلاث حرف كلمة زنجبار

(٥) ماعدد التغيرات المختلفة التى يمكن أخذها من جميع أحرف كلمة بحر

(٦) كم عدد الانتخابات التى يمكن تشكيلها باربع قطع من العملة المصرية تؤخذ من الانواع الآتية جنيه مصرى ــ ريال ــ نصف ريال ــ ربع ريال ــ قطعة ذات قرشين ــ قرش

(٧) كم كلمة ذات أربعة أحرف مختلفة يمكن تكوينها من الثمانية والعشرين حرفا الهجائية بحيث ان أحرف أى كلمة لاتوجد بتمامها فى كلمة أخرى

(٨) كم كلمة ثلاثية يمكن تكوينها من الثلاثة عشر حرفا المهملة

(٩) كم عددا أكبر من ٢٠٠٠٠ وأقل من ٣٠٠٠٠ يحتوى كل منها على الارقام ٦و٧و٨و٩و٢

(١٠) يراد تشكيل لجنة يكون بها ثلاثة مهندسين وستة مزارعين ينتخبون من خمسة مهندسين وعشرة مزارعين فبكم كيفية يمكن تشكيلها

(١١) كم كلمة رباعيـة يمكن تكوينها من الثمانية والعشرين حرفا الهجائيـة بحيث يدخل فى أول كل منها حرف ا

(١٢) كم كلمة مركبة من خمسة أحرف بحيث يكون فى كل منها ثلاثة أحرف من الثلاثة عشر حرفا المهملة وحرفان من الخمسة عشر حرفا المعجمة وبحيث لاتوجد أحرف أى كلمة بتمامها فى كلمة أخرى

(١٣) من المقرر فى علم الحساب أن حاصل ضرب عدة عوامل لا يتغير بتغير واضعها فكم عدد التغييرات التى يمكن اجراؤها على العوامل ٢ × ٣ × ٥ × ٧ × ١١ × ١٣

(١٤) كاف مدرس تلاميذ فصل أن يكتب كل منهم عددا مركبا من أربعة الارقام ٦و٧و٨و٩ وأن لايكتب تلميذ عدد كتبه آخر منهم وبذلك وجدت جميع الاعداد الممكن تكوينها من هذه الارقام فكم عدد تلاميذ الفصل

(١٥) ماعدد الكيفيات التى يمكن أن يكتب بها البيت الآتى مع تغير مواضع جميع كلماته الثمان بعضها محل بعض بجميع الكيفيات الممكنة

سعيد همام جواد كريم ذكى نجيب جليل عظيم

(١٦) عربة سكة حديدية بها ثمانية محال فى كل جهة أربعة فبكم كيفية يمكن لثمانية ركاب أن يشغلوا هذه المحال بعد العلم بان أثنين منهم لايمكنهما أن يجلسا بعكس سير القطار وواحد لايمكنه أن يجلس الا بعكس سير القطار

(١٧) اذا كان عدد التراتيب سباع لاشياء عددها ى مساوى ٣٠ مرة عدد التراتيب سداس لاشياء عددها ى — ٢ فاوجد مقدار ى

(١٨) اذا كان عدد التوافيق نونا نونا لستة عشر شيأ يساوى عدد التوافيق نونا ناقصا ثمانية نونا ناقصا ثمانية لتلك الاشياء فأوجد مقدار ى ثم أحسب المقدارين ى ق٥ و ١٨ق ى

(١٩) اذا كانت نسبة عدد التوافيق خماس لاشياء عددها م الى عدد التوافيق ثلاث لاشياء عددها م — ١ كنسبة ٢٤ الى ٥ فاوجد مقدار م

(٢٠) يراد تكوين ارسالية لاوروبا من خمسة طلبة ينتخبون من ستة طلبة من مدارس المعلمين ومن أربعة من طلبة الطب بحيث يكون اثنان من هذه الارسالية من طلبة الطب فبكم كيفية يكون انتخابهم

(٢١) يراد تشكيل مجلس عسكرى من ستة أعضاء ينتخبون من أربعة من الضباط العظام ومن سبعة من الضباط الآخرين بحيث يكون فى هذا المجلس اثنان من الضباط العظام على الاقل فما عدد كيفيات انتخاب أعضائه

(٢٢) يراد تشكيل لجنة من سبعة أشخاص ينتخبون من خمسة موظفين ومن ثمانية من الاعيان بحيث يكون فى هذه اللجنة ثلاثة موظفون على الاقل فما عدد الكيفيات التى تنتخب بها هذه اللجنة

(٢٣) ماعدا الكيفيات التى يمكن أن تنتخب بها أربع جرائد يومية من عشر جرائد مع ملاحظة أحد الشرطين الآتيين

أولا — بانتخاب جريدة مخصوصة منها فى كل مرة

ثانيا — بترك جريدة مخصوصة منها فى كل مرة

(٢٤) ماعدا الكلمات التى يمكن تركيبها من أحرف كلمة هدهد بتغيير مواضع الاحرف وكذا من أحرف كلمة سمسمة ثم من أحرف كلمة سيسيلية

(٢٥) ماعدد الكلمات التى يمكن تركيبها من جميع احرف كلمة سلسلة ثم من جميع أحرف كلمة بربرى ثم من جميع أحرف كلمة طليطلة

(٢٦) كم عدد الاعداد التى يمكن تركيب كل منها من الارقام ٢ و ٣ و ٢ و ٣ ثم من الارقام ٣ و ٤ و ٦ و ٣ و ٤ ثم من الارقام ١ و ٢ و ٣ و ١ و ٢ و ٣ و ١ و ٠

(٢٧) ماعدا الحـدود المختلفة التى يمكن احداثها من أحرف الحد $ا^{٥} ت^{٣} ح^{٦}$ اذا كتبت بدون أسس

(٢٨) ماعدد الكيفيات التى يمكن أن توزع بها ٣ جوائز مختلفة (ساعة ومحفظة وكتاب) على أربعة تلاميذ (ذكى ونجيب وراغب وشاكر) يتسابقون فى الامتحان فى ثلاثة علوم

(٢٩) ماعدد الكيفيات التى يمكن أن يعطى بها أشياء عددها ن الى أشخاص عددهم م اذا لم يكن هناك قيد فى عدد الاشياء التى يأخذها كل شخص

(٣٠) عشرة ملاحين فى قارب واحد لا يمكنه أن يجـدف الا جهـة اليمين وواحد لا يمكنه أن يجـدف الا جهة الشمال فـا عدد الكيفيات التى يمكن أن يجاس بهـا هؤلاء الملاحون ليجدفوا فى القارب

(٣١) بكم كيفية يمكن أن يجاس ٥ أشخاص حول منضدة مستديرة (يلاحظ تثبيت أحدهم فى محل)

(٣٢) بكم كيفية يمكن أن يجلس ستة أشخاص ثلاثة أولاد وثلاث بنات حول منضدة مستديرة بحيث لا يجاس ولدان متجاورين (يثبت أحد الاشخاص فى محل)

(٣٣) بكم كيفية يمكن أن يكون أشخاص عددهم ن صفا فرديا اذا كان شخصان منهم لا يشغلان طرفى الصف

(٣٤) بكم كيفية يمكن أن يكون عشرة أشخاص صفا فرديا بشرط أن اثنين منهم لا يكونان فى طرفيه

نظرية ذات الحدين

٣٠٠ تمهيد تقدم بنمرة ٤٩ أن

(س + ا)(س + ب) = س^{٢} + (ا + ب) س + اب (١)

ويرى أن هذا الحاصل (قبل الاختصار) مكوّن من حدود كل منها مركب من حرفين وكل حرف منهما مأخوذ من عامل واذا بحثنا طريقة تركيبها نجد

(١) س^{٢} مكوّن من أخذ حرف س من كل عامل

(٢) الحدان المحتويان على س مكوّن كل منهما من أخذ الحرف س من كل عامل وأحد الحرفين ا و ب على التوالى

(٣) الحد الذى لم يشتمل على س هو حاصل ضرب الحرفين ا و ب

مثال اذا جعل فى القانون (١) أن ا = ٢ و ب = ٣ يكون

(س + ٢)(س + ٣) = س^{٢} + ٥ س + ٦

فاذا أريد تكوين حاصل ضرب ثلاث كميات كل منها ذات حدين مثل

(س + ا)(س + ب)(س + ح) يكوّن حاصل ضرب الكميتين الاول كما تقدم ثم يضرب الحاصل فى (س + ح) فينتج

س^{٣} + (ا + ب + ح) س^{٢} + (اب + اح + ب ح) س + اب ح (٢)

وهذا الحاصل (قبل الاختصار) مكوّن من عدة حدود كل منها مركب من ثلاثة أحرف وكل حرف مأخوذ من عامل واذا بحثنا كيفية تكوينها نجد

(١) $س^{٣}$ مكوّن من أخذ الحرف س من كل عامل

(٢) الحدود المشتملة على $س^{٢}$ مكوّن كل منها من أخذ الحرف س من كل عاملين على التوالى وأحد الاحرف ا و ب و ح من العامل الباقى

(٣) الحدود المشتملة على س مكوّن كل منها من أخذ الحرف س من كل عامل على التوالى وحرفين من الاحرف ا و ب و ح يؤخذان من العاملين الباقيين

(٤) الحد الذى لم يشتمل على س مكوّن من الاحرف ا و ب و ح

مثال اذا جعل فى القانون (٢) ا = ٢ و ب = − ٣ و ح = ٥ يكون (س + ٢) (س − ٣) (س + ٥) = $س^{٣}$ + ٤ $س^{٢}$ − ١١ س − ٣٠

واذا أريد تكوين حاصل ضرب أربع كميات كل منها ذات حدين مثل (س + ا) (س + ب) (س + ح) (س + د) يكوّن حاصل ضرب الثلاث كميات الاول كما تقدم ثم يضرب الحاصل فى س + د فينتج

$س^{٤}$ + (ا + ب + ح + د) $س^{٣}$ + (اب + اح + اد + بح + بد + حد) $س^{٢}$ + (ابح + ابد + احد + بحد) س + ابحد

وهذا الحاصـل (قبل الاختصار) مكوّن من جملة حدود كل منها مركب من أربعة أحرف وكل حرف مأخوذ من عامل واذا بحثنا كيفية تكوينها نجد

(١) سـ^{٤} مكون من أخذ الحرف سـ من كل عامل

(٢) الحـدود المشتملة على سـ^{٣} كل منها مكوّن من أخذ الحرف سـ من كل ثلاثة عوامل على التوالى وأحد الاحرف ا و ب و حـ و ى من العامل الباقى (المعتبر أنه لم يؤخذ منه سـ)

(٣) الحدود المشتملة على سـ^{٢} كل منها مكون من أخذ الحرف سـ من كل عاملين على التوالى وحرفين من الاحرف ا و ب و حـ و ى يؤخذ ان من العاملين الباقيين (المعتبر أنه لم يؤخذ منهما سـ) .

(٤) الحـدود المشتملة على سـ مكون كل منها من أخذ الحرف سـ من كل عامل على التوالى وثلاثة من الاحرف ا و ب و حـ و ى تؤخذ من ثلاثة العوامل الباقية (المعتبر أنه لم يؤخذ منها سـ)

(٥) الحـد الذى لم يشتمل على سـ مكوّن من أربعـة الأحرف ا و ب و حـ و ى

مثال اذا جعل فى (٣) ا = ٢ و ب = − ٣ و حـ = ٥ و ى = − ٨ يكون (سـ + ٢) (سـ − ٣) (سـ + ٥) (سـ − ٨) = سـ^{٤} + (٢ − ٣ + ٥ − ٨) سـ^{٣} + (− ٦ + ١٠ − ١٦ − ١٥ + ٢٤ − ٤٠) سـ^{٢} + (− ٣٠ + ٤٨ − ٨٠ + ١٢٠) سـ + ٢٤٠ = سـ^{٤} + ٤ سـ^{٣} − ٤٣ سـ^{٢} − ٥٨ سـ + ٢٤٠

وبالاستمرار على نحو ما ذكر يمكن تكوين حاصــل ضرب خمســة عوامل وســتة عوامل وهكذا لكميات كل منهــا مركب من حدين ، ومن الايضاحات السابقة يمكن أن يستنتج ماياتى

أولا — حاصل الضرب مكوّن من جملة كميات تزيد بواحد عن عدد المضاريب ذات الحدين

ثانيــا — أن أس س فى الحد الاول مساويا لعــدد المضاريب ذات الحدين وأسه فى كل من الحدود التالية ينقص بواحد من سابقه

ثالثــا — مكرر الحد الاول هو الواحد ومكرر الحد الثانى هو مجموع الحدود الثانية من المضاريب ذات الحدين ومكرر الحد الثالث هو مجموع الحدود الثانية مأخوذة مثنى ومكرر الحد الرابع هو مجموع الحدود الثانية مأخوذة ثلاث وهكذا والحد الأخير هو حاصل ضرب الحدود الثانية من الكميات ذات الحدين

١٠٣ لبيان أن هذه القاعدة حقيقية فى تكوين حاصل ضرب كميات ذات حدين مهما كان عددها يكفى أن نبرهن على أنها اذا كانت حقيقية فى عوامل عددها م تكون حقيقية فى عوامل عددها م + ١

فاذا فرض أنها حقيقية فى العوامل الآتية بأن كان

$$(س + ا)(س + ب)(س + ح) \ldots\ldots (س + ى) = س^{م} + ع_{١} س^{م-١} + ع_{٢} س^{م-٢} + \ldots \ldots ع_{م}$$

(وفى هذا الحاصل $ح_{١}$ رمز لمجموع الحدود الثانية ا و ب و ح و ... ك و $ح_{٢}$ رمز لحواصل ضربها مثنى و $ح_{٣}$ رمز لحواصل ضربها ثلاث وهكذا و $ح_{ن}$ رمز لحاصل ضربها كلها)فاذا ضرب طرفا هذه المتساوية فى كمية ذات حدين مثل $س + ل$ بأن يضرب الطرف الثانى أولا فى س ثم فى ل واختصرت الحواصل ينتج $(س + ا)(س + ب)$، $(س + ح) .... (س + ك)(س + ل) =$

$$س^{م+١} + (ح_{١} + ل)س^{م} + (ح_{٢} + ح_{١}ل)س^{م-١} + (ح_{٣} + ل ح_{٢})س^{م-٢} + ... ح_{ن} ل$$

فيرى أولاأن س فى الحد الاول هو $م + ١$ وهو مقدار عدد العوامل الأصليــة زائدا واحد اى بقدر عدد العوامل الجديدة وان أسسه فى الحدود الأخرى آخذة فى النقص بواحد فى كل حد عن سابقه

ثانيــا ــ أن مكرر الحــد الاول هو الواحد ومكرر الحد الثانى هو $ح_{١} + ل$ أى مجموع الحدود الثانية بمــا فيها ل وان مكرر الحد الثالث هو $ح_{٢} + ح_{١}ل$ أى مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية الأصلية مثنى مضافا اليها حاصل ضرب الحدود الثانية فى الحد الجديد ل وهذا هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية كلها بما فيها ل وأن مكرر الحد الرابع $ح_{٣} + ح_{٢}ل$ مكوّن من مجموع حواصــل ضرب الحدود الثانية الأصلية ثلاث مضافا اليه $ح_{٢}ل$ أى حاصل ضرب الحدود الثانية الأصلية مثنى فى ل وهذا هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب الحدود الثانية كلها ثلاث بمــا فيها ل وهكذا وأما الحد الأخير وهو $ح_{ن}ل$ فانه

مكوّن من الحدود الثانية الأصلية مضروبة فى الحد ل فهو حاصــل ضرب الحدود الثانية كلها بمـا فيها ل وبذلك تتضح صحة القاعدة فى حدود عددها م + ١

ومن حيث ان ثبت صحة هذه القاعدة فى عوامل عددها م + ١ بفرض ثبوت صحتها فى عوامل عددها م وقدسبق بيان صحتها فى أربعة عوامل فتثبت اذن صحتها فى خمسة عوامل ومتى ثبتت صحتها فى خمسة عوامل تثبت صحتها فى ستة وهلمّ جرّا واذن فهى حقيقية مهما كان عدد العوامل

٣٠٢ تنبيه اذا تأملنا فى مكررات س التى هى ح$_{\text{١}}$ و ح$_{\text{٢}}$ و ح$_{\text{٣}}$ ... الخ من حاصل ضرب كميات ذات حدين نجد أن عدد حدود المكرر ح$_{\text{١}}$ هو عدد الحروف الثانية التى عددها م وأن حدود عدد المكرر ح$_{\text{٢}}$ هو كعدد التوافيق مثنى للحروف الثانية أى $^{\text{م}}\text{ق}_{\text{٢}}$ وان عدد حدود المكرر ح$_{\text{٣}}$ هو كعدد التوفيق ثلاث لتلك الحروف أى $^{\text{م}}\text{ق}_{\text{٣}}$ وهكذا

٣٠٣ قانون ذات الحدين ـ الغرض من قانون ذات الحدين هو ايجاد مقدار كمية ذات حدين مرفوعة الى درجة ما

لنفرض أن المطلوب ايجاد مقدار (س + ح)$^{\text{م}}$ أى ايجاد قانون لحاصل ضرب كميات ذات حدين كل منها س + ح وعددها م أى

(س + ح)$^{\text{م}}$ = (س + ح) (س + ح) (س + ح) ... عوامل يقدر م

فينطبق قانون (نمرة ٣٠١) وملاحظة (٣٠٢) نجد أن الحد الاول من حاصل الضرب باقيا على حاله أى $س^{م}$ ويؤل مكرر الحـد الثانى الى ح مكررا بقدر م ويؤل معامل الحـد الثالث أى $ح^{٢}$ مكررا بقدر عدد التوافيق مثنى لحروف عددها م ويؤل معامل الحد الرابع الى $ح^{٣}$ مكررا بقدر التوافيق ثلاث لحروف عددها م وهكذا فيكون

$$(س + ح)^{م} = س^{م} + م\,ح\,س^{م-١} + {}^{م}ن_{٢}\,ح^{٢}\,س^{م-٢} + {}^{م}ن_{٣}\,ح^{٣}\,س^{م-٣} + \ldots\ldots + {}^{م}ن_{م}\,ح^{م}$$

واذا استبدل عدد التوافيق بمقاديرها ينتج

$$(س + ح)^{م} = س^{م} + م\,ح\,س^{م-١} + \frac{م\,(م-١)}{١\times٢}\,ح^{٢}\,س^{م-٢} + \frac{م\,(م-١)\,(م-٢)}{١\times٢\times٣}\,ح^{٣}\,س^{م-٣} + \ldots\ldots + {}^{م}ن_{م}\,ح^{م} \quad (١)$$

وهذا هو القانون المطلوب وبالتأمل يرى أن هذه السلسلة مكونة من حدود عددها م + ١ يشتمل كل منها على س و ح فد درجات س تأخذ فى التنازل من م الى الصفر ودرجات ح تأخذ فى التصاعد من صفر الى م ومكررات هذه الحدود هى على التوالى ١ ثم م ثم عدد التوافيق مثنى لحروف عددها م ثم عدد التوافيق ثلاث ثم رباع وهكذا لتلك الحروف

ويكتفى هنا فى بيـان عدد التوافيـق مثنى وثلاث ورباع وهكذا للحروف التى عددها م بالرموز $ن_{م}$ و $ن_{٣}$ و $ن_{٤}$ الخ وبمراعاة ما ذكر يمكن كتابة القانون السابق هكذا

$$(س + ح)^{م} = س^{م} + ن_{١}\,ح\,س^{م-١} + ن_{م}\,ح^{٢}\,س^{م-٢} + ن_{٣}\,ح^{٣}\,س^{م-٣} + \ldots\ldots ن_{م}\,ح^{م} \quad (١)$$

٣٠٤ اذا وضعنا فى القانون السابق المقدار $-ح$ بدلا من $ح$ ينتج

$$(س - ح)^م = س^م + ق_١(-ح) س^{م-١} + ق_٢(-ح)^٢ س^{م-٢} + ق_٣(-ح)^٣ س^{م-٣} + \ldots + ق_م(-ح)^م$$

وبملاحظة أن القوى الفردية للحدود السالبة تكون سالبة وقواها الزوجية موجبة يكون

$$(س - ح)^م = س^م - ق_١ ح س^{م-١} + ق_٢ ح^٢ س^{م-٢} - ق_٣ ح^٣ س^{م-٣} + \ldots \pm ق_م ح^م$$

وبمقارنة هذا القانون بالسابق يرى أن الحدود فى المقدارين $(س + ح)^م$ و $(س - ح)^م$ متحدة المقدار المطلق ولكن فى $(س - ح)^م$ هى بالتوالى موجبة وسالبة والحد الاخير يكون موجبا أو سالبا على حسب مايكون م زوجيا أو فرديا

مثال ١ $(س + ح)^٦ = س^٦ + ق_١ ح س^٥ + ق_٢ ح^٢ س^٤ + ق_٣ ح^٣ س^٣ + ق_٤ ح^٤ س^٢ + ق_٥ ح^٥ س + ق_٦ ح^٦$

وباستفاضة عدد التوافيق بمقاديرها ينتج

$$(س + ح)^٦ = س^٦ + ٦ ح س^٥ + ١٥ ح^٢ س^٤ + ٢٠ ح^٣ س^٣ + ١٥ ح^٤ س^٢ + ٦ ح^٥ س + ح^٦$$

مثال ٢ $(س - ح)^٦ = س^٦ - ٦ ح س^٥ + ١٥ ح^٢ س^٤ - ٢٠ ح^٣ س^٣ + ١٥ ح^٤ س^٢ - ٦ ح^٥ س + ح^٦$

مثال ٣ $(س - ح)^٥ = س^٥ - ق_١ ح س^٤ + ق_٢ ح^٢ س^١ - ق_٣ ح^٣ س^٢ + ق_٤ ح^٤ س - ق_٥ ح^٥$ أى

$$(س - ح)^{٥} = س^{٥} - ٥ ح س^{٤} + ١٠ ح^{٢} س^{٣} - ١٠ ح^{٣} س^{٢} + ٥ ح^{٤} س - ح^{٥}$$

٣٠٥ القانون العام لاى حد من حل ذات الحدين

فى قانون ذات الحدين السابق يشاهد مايأتى

أولا ـ أن أسس ح تبتدئ من العدم وتأخذ فى الزيادة الى م وان درجته فى أى حد هى أقل بواحد من ترتيب هذا الحد

ثانيا ـ أن أسس س تبتدئ من درجة م وتأخذ فى النقص حتى تؤل الى صفر وان درجة أسه فى أى حد هى باقى طرح أس ح من م ويؤخذ من هذا أن مجموع أسس س و ح فى أى حد يساوى م

ثالثا ـ أن المكررات هى عبارة عن ١ ثم م (أى التوافيق واحدا واحدا لحروف عددها م) ثم عدد التوافيق مثنى وثلاث ورباع لحروف عددها م حتى نصل الى عدد التوافيق التى عددها م (أى واحدا) وأن مكرر أى حد هو عدد التوافيق المبينة بمقدار أقل بواحد من ترتيب هذا الحد

رابعا ـ علامة أى حد تكون سالبة اذا كان ح سالبا وكان الحد زوجى الرتبة وماعدا ذلك فهى موجبة

ومما ذكر يمكن الحصول على أى حد من التحليل اذا علم ترتيبه فاذا فرض أن المطلوب ايجاد الحد الذى ترتيبه $ر + ١$ من حل ذات الحدين $(س + ح)^{م}$ يكون أس ح هو ر وأس س هو $م - ر$ والمكرر هو $ق^{م}_{ر}$ وأما العلامة فهى موجبة ويكون

الحد الذى ترتيبه (ر + ١) = $^{م}ق_{ر}$ $س^{م-ر}$ $ح^{ر}$ ويوضع بدل التوافيق مقدارها يكون

الحد الذى ترتيبه (ر + ١) = $\frac{م(م-١)(م-٢)+\cdots(م-ر+١)}{|ر}$ $س^{م-ر}$ $ح^{ر}$

مثال ١ أوجد الحد الخامس من $(أ + ٢ س^{٣})^{١٧}$

الحد الخامس = $^{١٧}ق_{٤}$ $أ^{١٣}$ $(٢ س^{٣})^{٤}$ = $\frac{١٧\times١٦\times١٥\times١٤}{١\times٢\times٣\times٤}$ × ١٦ $أ^{١٣}$ $س^{١٢}$ = ٣٨٠٨٠ $أ^{١٣}$ $س^{١٢}$

مثال ٢ أوجد الحد الرابع عشر من $(٣ - أ)^{١٥}$

الحد الرابع عشر = $- {}^{١٥}ق_{١٣}$ $٣^{٢}$ $أ^{١٣}$ = $^{١٥}ق_{٢}$ ٩ $أ^{١٣}$ = $- \frac{١٥\times١٤}{١\times٢}$ ٩ $أ^{١٣}$ = − ٩٤٥ $أ^{١٣}$

مثال ٣ أوجد الحد العاشر من $(س + ٣)^{١٤}$

الحد العاشر = $^{١٤}ق_{٩}$ $س^{٥}$ × $٣^{٩}$ = $^{١٤}ق_{٥}$ × $٣^{٩}$ $س^{٥}$ = ٦١٠٥٦٦٦ $س^{٥}$

٣٠٦ تنبيه يمكن ايجاد معامل أى حد من حل المقدار $(س + ح)^{م}$ اذا علم معامل الحد الذى قبله مباشرة وذلك بأن نضرب معامل الحد المعلوم فى أس س من هذا الحد ونقسم الحاصل على رتبة هذا الحد عينه

مثلا فى حل المقدار $(س + ح)^{٧}$ اذا علم أن مكرر الحد الثالث هو ٢١ فان أس س فى هذا الحد يكون ٧ − ٢ أى ٥ ورتبة هذا الحد الثالثة واذن فمكرر الحد الرابع يكون $\frac{٢١\times٥}{٣}$ = ٣٥

٣٠٧ اذا فرض أن المطـلوب رفع الكمية ١ + ح الى درجة م فنعتبر فى القانون العام أن الحرف سـ يساوى واحدا وبما أن القوى المختلفة للواحد هى واحد فيؤل القانون الى

$$(١ + ح)^{م} = ١ + ن_{١}\, ح + ن_{م}\, ح^{٢} + ن_{٣}\, ح^{٣} \ldots + ن_{م}\, ح^{م}$$

أو

$$(١ + ح)^{م} = ١ + م\, ح + \frac{م\,(م-١)}{١\times٢}\, ح^{٢} + \frac{م\,(م-١)\,(م-٢)}{١\times٢\times٣}\, ح^{٣} \ldots + ح^{م}$$

ويؤل قانون الحد العام الذى ترتيبه ر + ١ الى

$$\frac{م\,(م-١)\,(م-٢)\,\cdots\cdots\,(م-ر+١)}{\underline{|ر}}\, ح^{ر}$$

٣٠٨ يمكن بيان قانون ذات الحدين بواسـطة الحالة التى فيها الحد الاول واحد لانه اذا فرض أن ذات الحدين هى سـ + صـ وأخذفيهاسـ مضروبامشتركاتؤلالى سـ $(١ + \frac{صـ}{سـ})$وحينئذيكون $(سـ + صـ)^{م} = [\,سـ\,(١ + \frac{صـ}{سـ})\,]^{م}$ فاذا فرض أن $\frac{صـ}{سـ} = ع$ ينتج

$$(سـ + صـ)^{م} = [\,سـ\,(١ + ع)\,]^{م} = سـ^{م}\,(١ + ع)^{م}$$

أعنى أن نبحث عن مقدار الكمية $(١ + ع)^{م}$ كما تقدم بنمرة ٣٠٧ ثم نضرب كل حد منها فى $سـ^{م}$

وكذلك يمكن ايجاد مقدار أى حدمنها بايجاد مقدار الحد العام من $(١ + ح)^{م}$ المبينة بنمرة ٣٠٧ وضربه فى $سـ^{م}$

مثال ١ ليكن المطلوب ايجاد مقدار $(س + ح)^{٦}$ نأخذ س مضروبا مشتركا فينتج $(س + ح)^{٦} = س^{٦}\left(١ + \frac{ح}{س}\right)^{٦}$ ثم نبحث عن مقدار $\left(١ + \frac{ح}{س}\right)^{٦}$ فنجد

$$\left(١ + \frac{ح}{س}\right)^{٦} = ١ + ن_{١}\frac{ح}{س} + ن_{٢}\frac{ح^{٢}}{س^{٢}} + ن_{٣}\frac{ح^{٣}}{س^{٣}} + ن_{٤}\frac{ح^{٤}}{س^{٤}} + ن_{٥}\frac{ح^{٥}}{س^{٥}} + ن_{٦}\frac{ح^{٦}}{س^{٦}} = ١ + ٦\frac{ح}{س} + ١٥\frac{ح^{٢}}{س^{٢}} + ٢٠\frac{ح^{٣}}{س^{٣}} + ١٥\frac{ح^{٤}}{س^{٤}} + ٦\frac{ح^{٥}}{س^{٥}} + \frac{ح^{٦}}{س^{٦}}$$

وبضرب طرفى المتساوية فى $س^{٦}$ ينتج $س^{٦}\left(١ + \frac{ح}{س}\right)^{٦} = س^{٦} + ٦ ح س^{٥} + ١٥ ح^{٢} س^{٤} + ٢٠ ح^{٣} س^{٣} + ١٥ ح^{٤} س^{٢} + ٦ ح^{٥} س + ح^{٦}$

مثال ٢ ليكن المطلوب ايجاد الحد الخامس من $(س + ح)^{٦}$ فنلاحظ أنه الحد الخامس من $\left(١ + \frac{ح}{س}\right)^{٦}$ مضروبا فى $س^{٦}$ وبواسطة القانون العام لمقدار أى حد نمرة ٣٠٧ ينتج الحد الخامس $= \frac{٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣}{١ \times ٢ \times ٣ \times ٤} \times \frac{ح^{٤}}{س^{٤}} = ١٥\frac{ح^{٤}}{س^{٤}}$ وبضرب هذا المقدار فى $س^{٦}$ ينتج

الحد الخامس من $(س + ح)^{٦} = ١٥ ح^{٤} س^{٢}$

تمـــرين ٦٩

أوجد مقادير كل كمية من الكميات ذات الحدين الآتية

(١) $(س + ١)^{٤}$
(٢) $(س + ٣)^{٥}$
(٣) $(س +)^{٦}$
(٤) $(س - ب)^{٤}$
(٥) $(س - ب)^{٥}$
(٦) $(س - ٢)^{٤}$
(٧) $(س - ٤)^{٥}$
(٨) $(٢ س + ح)^{٥}$

(٩) $(٢\,س + ٣)^{٥}$

(١٠) $(٢ - \frac{س}{٢})^{٦}$

(١١) $(٣\,س - ح)^{٦}$

(١٢) $(٣\,س - ح)^{٧}$

(١٣) $(٣\,س - ٥)^{٦}$

(١٤) $(٣\,س - ٤)^{٥}$

(١٥) $(٢\,س + \frac{ص}{٢})^{٤}$

(١٦) $(ا + \frac{٣}{ب})^{٧}$

(١٧) $(ا\,س + \frac{ص}{ا})^{٩}$

(١٨) $(١ + ح)^{٤}$

(١٩) $(١ - ٢\,ص)^{٥}$

(٢٠) $(ا\,س - \frac{ص}{ا})^{٩}$

أوجد مقادير كل من الحدود المبينة من حل الكميات الآتية

(٢١) الرابع من $(س + ح)^{٧}$

(٢٢) الخامس من $(س - ح)^{٦}$

(٢٣) الرابع من $(ا - س)^{١٢}$

(٢٤) السادس من $(٢ - ص)^{٧}$

(٢٥) الخامس من $(ا - ٥\,ب)^{٧}$

(٢٦) الخامس عشر من $(٢\,س - ١)^{١٧}$

(٢٧) السابع من $(١ - \frac{١}{س})^{١٠}$

(٢٨) العاشر من $(س^{٢} - س)^{١٧}$

(٢٩) السادس من $(٣\,س - \frac{١}{٢})^{٩}$

(٣٠) الثالث والعشرون من $(س^{٢} + \frac{ب}{س})^{٢٥}$

(٣١) أوجد مقدار $(س - \sqrt{٣})^{٤} + (س + \sqrt{٣})^{٤}$

(٣٢) أوجد مكرر $س^{١٢}$ من $(س^{٢} + ٢\,س)^{١٠}$

(٣٣) أوجد مكرر س من $(س^{٢} - \frac{١}{٢\,س})^{١٤}$

(٣٤) أوجد مكرر $س^{٢٠}$ من $(\frac{س^{٢}}{٣} - \frac{٢}{٣\,س})^{١٥}$

(٣٥) أوجد الحد الذى لا يشتمل على س من $(٢\,س^{٢} - \frac{١}{س})^{١٢}$

(٣٦) اذا كان ثلاث مكررات متتالية من حل $(١ + س)^{ن}$ هى ٣٥ و ٢١ و ٧ أوجد مقدار ن

(٣٧) اذا كان ثلاثة مكررات متتالية من حل $(١ - س)^{ن}$ هى − ٢٠ و ١٩٠ و − ١١٤ فما مقدار ن

(٣٨) اذا كانت النسبة بين الحدين الثانى والثالث من حل ذات الحدين $(ا + ب)^{ن}$ كالنسبة بين الحدين الثالث والرابع من حل ذات الحدين $(ا + ب)^{ن+٣}$ أوجد مقدار ن

(٣٩) أوجد مكرر $س^{م}$ فى حل المقدار $(س^{٢} + \frac{١}{س})^{٣م}$

(٤٠) أوجد الحد المتوسط من حل $(١ + ر)^{٢ن}$ فى أبسط أوضاعه

٣٠٩ مكررا كل حدين متساويى البعد من الطرفين فى حل المقدار $(١ + س)^{ن}$ متساويان

لنفرض حدين ترتيبهما من الطرفين ر + ١ فمن المعلوم (٣٠٥) أولا أن مكرر الحد الذى ترتيبه ر + ١ من الابتداء هو عدد التوافيق بقدر ر لحروف عددها ن أى $^{ن}ق_{ر}$ وثانيا أن الحد الذى ترتيبه ر + ١ من الانتهاء يسبقه حدود عددها ن + ١ − (ر + ١) أى ن − ر ويكون ترتيبه هو ن − ر + ١ ومكرر هذا الحد هو عدد التوافيق بقدر ن − ر لحروف عددها ن أى $^{ن}ق_{ن-ر}$ و بما أن عدد هذه التوافيق هو كعدد التوافيق بقدر ر اى $^{ن}ق_{ر}$ (٢٩٤) فثبتت صحة القاعدة

مثلا لايجاد مكرر الحد الرابع من الطرفين فى حل المقدار $(١ + س)^{٩}$ يقال مكرر الحد الرابع من الابتداء هو $^{٩}ق_{٣}$ والحد الرابع من الانتهاء هو السابع من الابتداء ومكرره هو $^{٩}ق_{٦}$ وبموجب (٢٩٤) يعلم أن $^{٩}ق_{٦} = {}^{٩}ق_{٣}$ واذن فيكون المكرران متساويين وبحساب كل منهما نجده ٨٤

٣١٠ أكبر مكرر فى حل المقدار $(١ + س)^{ن}$

يؤخذ مما تقدم فى (٣٠٥) أن مكرر الحد العام الذى يرمز له بالرمز $ر + ١$ فى حل المقدار $(١ + س)^{ن}$ هو $ق^{ن}_{ر}$ ومن حيث انه تقدم بنمرة (٢٩٩) أن أكبر عدد التوافيق لحروف عددها ن هو عدد التوافيق المأخوذة بقدر نصف ن متى كان ن زوجيا والمأخوذة بقدر نصف $(ن + ١)$ أو نصف $(ن - ١)$ اذا كان ن فرديا فتكون هذه المقادير هى أكبر مكرر فى حل $(١ + س)^{ن}$

مثلا أكبر مكرر فى حل المقدار $(١ + س)^{٨}$ هو المبين بتوافيق لحروف عددها ٨ مأخوذة بقدر $\frac{٨}{٢} = ٤$ (أى مكرر الحد الخامس) ومقداره ٧٠

وأكبر مكرر فى حل المقدار $(١ + س)^{١١}$ هو المبين بتوافيق لحروف عددها ١١ مأخوذة بقدر $\frac{١١ - ١}{٢} = ٥$ أى مكرر الحد السادس أو المبين بتوافيق لحروف عددها ١١ مأخوذة بقدر $\frac{١١ + ١}{٢} = ٦$ أى مكرر الحد السابع وكلاهما ٤٦٢

٣١١ ايجاد أكبر حد فى حل المقدار $(س + ح)^{ن}$

معلوم أن $(س + ح)^{ن} = س^{ن} (١ + \frac{ح}{س})^{ن}$ ومن حيث ان $س^{ن}$ يضرب فى كل حد من مقدار $(١ + \frac{ح}{س})^{ن}$ فيكفى البحث عن أكبر حد من حل هذه الكمية ولذا يقال اذا فرض أن ر و $ر + ١$ رمزان لترتيبى حدين متتاليين من مقدار $(١ + \frac{ح}{س})^{ن}$ فان الحد $ر + ١$ ينتج من ضرب الحد ر فى $\frac{ن - ر + ١}{ر} \times \frac{ح}{س}$ أى بضربه فى $(\frac{ن + ١}{ر} - ١) \frac{ح}{س}$ كما فى (٣٠٥) ومن حيث انه

العامل $\frac{ن+١}{ر} - ١$ يأخذ فى الصغر كلما زاد مقدار ر فالحد ر + ١ لايكون أكبر من الحد ر الا اذا آل المقدار $\left(\frac{ن+١}{ر} - ١\right)\frac{ح}{س}$ الى الواحد أو الى مقدار أقل من الواحد

ولنبحث عن مايلزم أن يأخذه هذا المقدار ليكون مساويا للواحد أو أكبر منه فأولا نفرض أن $\left(\frac{ن+١}{ر} - ١\right)\frac{ح}{س} = ١$ وبحل هذه المعادلة بالنسبة الى ر نجد $ر = \frac{ح(ن+١)}{ح+س}$ (١)

وثانيا ـ نفرض أن $\left(\frac{ن+١}{ر} - ١\right)\frac{ح}{س} > ١$ ثم نحل هذه المتباينة بالنسبة الى ر بأن نضرب الطرفين فى $\frac{س}{ح}$ ونحول ١ للطرف الثانى فينتج

$$\frac{ن+١}{ر} > \frac{س}{ح} + ١ \quad \text{أو}$$

$$\frac{ح(ن+١)}{ح+س} > ر \qquad (٢)$$

ومن حيث ان رتبة الحد المرموز له بحرف ر لابد أن تدل على عدد صحيح فاذا كان $\frac{ح(ن+١)}{ح+س}$ عددا صحيحا ورمز له بحرف ع فينبغى أن يجعل ر = ع ليكون العامل الذى يضرب فى ر واحدا (١) وحينئذ فالحد الذى ترتيبه ع + ١ يكون مساويا للحد الذى ترتيبه ع وهما أكبر من أى حد فى حل المقدار المفروض

واذا كان $\frac{ح(ن+١)}{س+ح}$ ليس بعدد صحيح ورمز لجزئه الصحيح بحرف ك فبناء على قانون (٢) المذكور آنفا يكون الحد الذى ترتيبه ك + ١ هو أكبر حد فى حل المقدار المفروض

وبناء على ما ذكر فانه ينبغى حساب المقدار $\frac{ح(ن+١)}{س+ح}$ فان كان عددا صحيحا دل ذلك على أن أكبر حدود الحل حدان متساويان أحدهما الذى ترتيبه بقدر هذا العدد الصحيح والثانى الذى ترتيبه أكبر منه بواحد

واذا كان المقدار المذكور عددا كسريا دل ذلك على أن أكبر حدود الحل هو الحد الذى ترتيبه بقدر الجزء الصحيح من ذلك المقدار زائدا واحدا

ولنطبق ماذكر على المثالين الآتيين

المثال الاول ـ المطلوب ايجاد أكبر حد فى حل المقدار $(ص + ب)^{٧}$ اذا كان $ص = ٥$ و $ب = ٣$

لذلك نحسب المقدار $\frac{(ن+١)ح}{س+ح}$ باعتبار أن $ن = ٧$ و $ح$ أى $ب = ٣$ و $س$ أى $ص = ٥$ فنجد $\frac{(٧+١)٣}{٥+٣} = ٣$

أى أن أكبر حدود الحل هما الحد الثالث والرابع وهما متساويان وبحسبان كل منهما نجد أنه ٦١١٦٢٥

المثال الثانى ـ المطلوب ايجاد أكبر حد فى حل المقدار $(ص+ب)^{٧}$ اذا كان $ص = ٤$ و $ب = ٣$

لذلك نحسب المقدار $\frac{(ن+١)ح}{س+ح}$ باعتبار أن $ن = ٧$ و $ح = ٣$ و $س = ٤$ فنجد $\frac{(٧+١)٣}{٣+٤} = \frac{٢٤}{٧} = ٣\frac{٣}{٧}$ ويكون أكبر حد فى حل المقدار المذكور هو الرابع وبحسابه نجد انه ٢٤١٩٢

ويمكن ايجاد مقدار أكبر حد بالكيفية التى استنتج بها قانون (٣٠٨)

فلا يجاد أكبر حد فى حل المقدار $(ص + ب)^{٧}$ بفرض أن $ص = ٤$ و $ب = ٣$ يقال معلوم أن $(ص + ب)^{٨} = ص^{٨}(١ + \frac{ب}{ص})^{٨}$
ومن حيث أن $ص^{٨}$ يضرب فى حد من مقـدار $(١ + \frac{ب}{ص})^{٨}$

فيكفى البحث عن أكبر حد من هذه الكمية ولذلك نرمز للحدين اللذين ترتيبهما ر و ر + ١ من المقدار (١ + ب/ص)^٨ بالحرفين ع و عَ فيكون

$$ع‌َ = \frac{٧ - ر + ١}{ر} \times \frac{ب}{ص} \times ع = (\frac{٨}{ر} - ١) \frac{٣}{٤} \times ع$$

وبناء عليه يكون عَ > ع كلما كان $(\frac{٨}{ر} - ١) \frac{٣}{٤} > ١$ أو

$$\frac{٨}{ر} - ١ > \frac{٤}{٣} \quad \text{أو}$$

$$\frac{٨}{ر} > \frac{٤}{٣} + ١ \quad \text{أو}$$

$$\frac{٨}{ر} > \frac{٧}{٣} \quad \text{أو}$$

$$٢٤ > ٧ ر \quad \text{أو}$$

$$\frac{٢٤}{٧} > ر$$

والقيمة التى يجب أن تعطى الى ر لتنطبق على ذلك هى ٣ وأكبر حد هو الرابع وهو عين ماتقدم فى المثال الثانى

٣١٢ تنبيه فى حل المقدار (س — ح)^ن تكون الحدود الزوجية الرتبة سالبة والفردية الرتبة موجبة وحينئذ فأى حد من الحدود الزوجية الرتبة يكون أصغر من قيمة أى حد من الحدود الفردية الرتبة ولكنه لايقصد فى تعيين أكبر حد الا القيمة المطلقة وحينئذ فلا حاجة لملاحظة العلامة فى تعيين أكبر حد

مثلا لايجاد أكبر حد فى حل المقدار (ص — ب)^٨ بفرض أن ص = ٥ و ب = ٣ نحسب المقدار $\frac{(ن + ١) ح}{س + ح}$ بفرض أن ن = ٨ و ح = ٣ فنجد

$\frac{٣(١+٨)}{٨} = \frac{٢٧}{٨} = ٣\frac{٣}{٨}$ ويكون أكبر الحدود هو الرابع باعتبار القيمة المطلقة وبحسابه نجده — ٧٤٢٥٠٠٠٠

٣١٣ ايجاد مجموع المكررات فى المقدار $(١ + س)^{ن}$

معلوم أن $(١+ س)^{ن} = ١ + ن_{١} س + ن_{٢} س^{٢} + ن_{٣} س^{٣} + \ldots\ldots ن_{ن} س^{ن}$ فاذا فرض أن $س = ١$ يكون

$$٢^{ن} = ١ + ن_{١} + ن_{٢} + ن_{٣} + \ldots\ldots ن_{ن}$$

أعنى أن مجموع المكررات يساوى $٢^{ن}$ أن يساوى القوة النونية لعدد ٢

تنبيه اذا طرح من طرفى المتطابقة السابقة واحد نجد

$$ن_{١} + ن_{٢} + ن_{٣} + \ldots\ldots ن_{ن} = ٢^{ن} - ١$$

ويؤخذ من هذا أن مجموع التوافيق لاشياء عددها ن مأخوذة بجميع الكيفيات الممكنة (بعضها أوكلها فى كل مرة) أى مأخوذة واحدا واحدا ثم اثنين اثنين وهكذا فى كل مرة يساوى القوة النونية لعدد ٢ ناقصة واحدا

٣١٤ فى المقدار $(١ + س)^{ن}$ مجموع مكررات الحدود الفردية الرتبة يساوى مجموع مكررات الحدود الزوجية الرتبة

لانه فى المطابقة $(١ + س)^{ن} = ١ + ن_{١} س + ن_{٢} س^{٢} + ن_{٣} س^{٣} \ldots\ldots ن_{ن} س^{ن}$ اذا جعل $س = -١$ يكون

$$٠ = ١ - ن_{١} + ن_{٢} - ن_{٣} + ن_{٤} - ن_{٥} \ldots\ldots$$

وعليه يكون $١ + ن_{٢} + ن_{٤} = ن_{١} + ن_{٣} + ن_{٥}$

٣١٥ يمكن استعمال نظرية ذات الحدين لبيان مقدار كمية تشتمل على أكثر من حدين

مثلا لايجاد مقدار $(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ١)^{٣}$ نفرض أن $٢\,\text{س} + ١$ حدا واحدا فيكون

$$\overline{(\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} - ١)}^{٣} = (\text{س}^{٢})^{٣} + ٣(\text{س}^{٢})^{٢}(٢\,\text{س} - ١) + ٣\,\text{س}^{٢}(٢\,\text{س} - ١)^{٢} + (٢\,\text{س} - ١)^{٣} = \text{س}^{٦} + ٦\,\text{س}^{٥} + ٩\,\text{س}^{٤} - ٤\,\text{س}^{٣} - ٩\,\text{س}^{٢} + ٦\,\text{س} - ١$$

وذلك بعد الاختصار

تمـــرين ٧٠

ابحث عن ترتيب الحد الذى مكره أكبر مايمكن فى حل ما يأتى

(١) $(١ + \text{س})^{٧٥}$

(٢) $(١ - \text{س})^{٣٣}$

(٣) $(١ + \text{ب})^{٢٢}$

(٤) $(١ + \text{ح})^{١٦}$

(٥) $(١ + \text{هـ})^{١١}$

(٦) $(١ + \text{هـ})^{١٣}$

أوجد ترتيب أكبر حد فى حل كل من الكميات الآتية

(٧) $(\text{ب} + \text{هـ})^{١٠}$ اذا كان $\text{ب} = ٣$, $\text{هـ} = ٢$

(٨) $(\text{ب} - \text{هـ})^{٢٨}$ « « $\text{ب} = ٩$, $\text{هـ} = ٤$

(٩) $(١ + \text{ح})^{٦}$ « « $\text{ح} = \frac{٣}{٤}$

(١٠) $(\text{ء} - ٣\text{ب})^{١٣}$ « « $\text{ء} = ٨$, $\text{ب} = ٢$

(١١) $(٥ - ٢\text{س})^{١٧}$ « « $\text{س} = \frac{١}{٢}$

(١٢) $(١ + \text{س})^{٧}$ « « $\text{س} = \frac{١}{٢}$

(١٣) $(١ - \frac{٢}{٣}\text{س})^{٨}$ « « $\text{س} = ١\frac{١}{٢}$

(١٤) (١ — ٢ س)^{٨} اذا كان س = ١

(١٥) ($\frac{١}{٢}$ — $\frac{١}{٣}$ س)^{٤} « « س = ١

(١٦) (٢ + $\frac{٢}{٧}$ س)^{١١} « « س = ١٤

(١٧) (أ — ٣ س)^{٩} « « س = ١ $\frac{١}{٢}$ ، و أ = ٢

(١٨) (٣ — ٢)^{ن} « « ن = ٦

مامقدار مجموع مكررات الحدود فى حل المقادير الآتية

(١٩) (١ + س)^{٧}

(٢٠) (١ + س)^{١٠}

(٢١) (١ + ص)^{١٢}

(٢٢) (١ + ٢ ص)^{٨}

(٢٣) (س + ص)^{١٦}

(٢٤) (٣ س + ص)^{٩}

(٢٥) برهن على أن مجموع مكررات الحدود الفردية فى حل المقدار (١ + ص)^{٨} يساوى مجموع مكررات الحدود الزوجية فى حل المقدار (١ + س)^{٨}

(٢٦) برهن على أن مجموع مكررات الحدود الزوجية الرتبة فى حل المقدار (١ + ص)^{٩} يساوى مجموع مكررات الحدود الفردية فى حل المقدار س (١ + ع)^{٩}

المطلوب ايجاد مقادير الكميات الآتية

(٢٧) (ب + ح + ى)^{٣}

(٢٨) (ب — ح + ى)^{٣}

(٢٩) (ح^{٢} + ٢ ح + ١)^{٣}

(٣٠) (س^{٢} — ٤ س + ٢)^{٣}

(٣١) (ب + ح + ٣)^{٤}

(٣٢) (ب^{٢} — ب + ١)^{٤}

(٣٣) فى حل المقدار (١ + س)^{٢٥} مكرر الحد الذى ترتيبه ٢ ر + ١ = مكرر الحد الذى ترتيبه ر + ٥ أوجد مقدار ر

(٣٤) اذا كان مكررا الحدين ١٦ و ٢٦ من حل المقـــدار (١ + س)^{ن} متساويين فما يكون مقدار ن

(٣٥) أوجد الحد الرائى من المبدأ والحد الرائى من النهاية فى حل المقـــدار (ح + ٢ س)^{ن}

(٣٦) مكررا الحدين اللذين ترتيبهما ر + ٣ ، ٢ ر − ٣ من حل الكمية (١ + س)^٣ن متساويان فأوجد الارتباط بين ر ، ن

الربح المركب

٣١٦ الربح المركب هو ربح المبلغ المقترض وأرباح أرباحه ففيه يضاف ربح السنة الاولى الى رأس المال ويعتبر الناتج رأس مال جديد فى السنة الثانية ثم يضاف ربح هذا المبلغ الجديد اليه ويعتبر الناتج رأس مال فى السنة الثالثة وهكذا

وبواسطة ماذكر يمكن حساب الربح المركب لاى مبلغ فى عددمّا من السنين بالسعر المعين الا أن الحساب بهذه الطريقة يكون مطولا خصوصا اذا كانت المدة كبيرة مثل عشر سنين أو عشرين سنة أو مائة سنة

وسنبين كيف تكون الأعمال الحسابية فى ذلك سهلة وبسيطة بواسطة قانون عام ثم تستنبط منه قوانين عامة لمسائل الارباح المركبة وتطبيق هذه القوانين على مسائل عددية فنقول

٣١٧ حساب جملة الربح المركب بعد معرفة الزمن والسعر نفرض أن مبلغ م جنيها مقترضا بالربح المركب بسعر ع ٪ لسنين عددها ن ونرمز للجملة بحرف ح ثم نقول اذا كان المبلغ المقترض جنيها واحدا فان ربحه فى السنة الاولى يكون $\frac{ع}{١٠٠}$ وجملته فى هذه السنة هى ١ + $\frac{ع}{١٠٠}$ فاذا رمز لهذا المجموع بحرف ر يكون ربحه فى السنة

الثانية $\frac{\text{ر ع}}{١٠٠}$ وجملته فى هذه السنة $\text{ر} + \frac{\text{ر ع}}{١٠٠} = \text{ر}\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right)$
$= \text{ر}^{٢}$ ولما كان هـذا المبلغ هو رأس المـال فى السنة الثالثة فربحه
فيهاهو $\frac{\text{ر}^{٢}\text{ع}}{١٠٠}$ وجملتـه فيها هى $\text{ر}^{٢} + \frac{\text{ر}^{٢}\text{ع}}{١٠٠} = \text{ر}^{٢}\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right)$
$= \text{ر}^{٣}$ و بالاستمرار على نحو ماذكر الى سـنين عددها ن تكون جملة الواحد فيها $\text{ر}^{\text{ن}}$ وبناء فالمبلغ م تكون جملته مبينة بالوضع

$$\text{ح} = \text{م}\ \text{ر}^{\text{ن}} \qquad (١)$$

أعنى أن جملة الربح المركب لمبلغ ما تساوى حاصل ضرب هذا المبلغ فى مجموع الواحد وربحه مرفوعا الى قوة بقدر عدد السنين

واذا طرح من هـذه الجملة المبلغ الاصلى يكون الباقى هو الربح المركب أى الربح المركب $= \text{م}\ \text{ر}^{\text{ن}} - \text{م} = \text{م}\left(\text{ر}^{\text{ن}} - ١\right) \qquad (٢)$

تطبيق ــ ما مقدار مايؤل اليه مبلغ ١٥٠٠ جنيه مقترض بالربح المركب لمدة ١٦ سنة بسعر ٥ ٪.

نضع فى قانون (١) بدل الحروف مقاديرها فينتج

$\text{ح} = ١٥٠٠ \times ١,٠٥^{١٦}$ تأخذلوغاريتم الطرفين

لو ح = لو ١٥٠٠ + ١٦ لو ١,٠٥ أو

لو ح = ٣,١٧٦٠٩ + ١٦ × ٠,٠٢١١٩ او

لو ح = ٣,٥١٥١٣ وبناء عليه يكون

ح = ٣٢٧٤,٣٨ وهو مقدار الجملة

وحينئذ يكون مقـدار الربح المركب = ٣٢٧٤,٣٨ — ١٥٠٠ = ١٧٧٤,٣٨ جنيها ويصح أن نبحث عن مقدار $١,٠٥^{١٦}$ بواسطة للوغاريتم فنجد

$١,٠٥^{١٦}$ = ٢,١٨٢٩٥ ثم نضربه فى ١٥٠٠ فينتج ٢٢٧٤,٤٢٥ جنيها وهو مقـدار لايفترق عن السابق الا بمقـدار يسير وهذا الفرق ناشئ من اللوغاريتمات اذ هى بدرجة تقريبية خصوصا فى الجداول ذات الارقام القليلة العدد

٣١٨ حساب المبلغ بعد معرفة الجملة والزمن والسعر

نأخذ القانون (١) وهو

ح = م $ر^{ن}$ ونستخرج منه مقدار م فنجد

$$م = \frac{ح}{ر^{ن}} \qquad (٣)$$

تطبيق ـ ما مقدار المبلغ المقترض بالربح المركب بسعر ٥٪ حتى آل بعد ١٦ سنة الى جملة قدرها ٣٢٧٤,٣٨ جنيها

لذلك نضع فى قانون (٣) بدل المعالم مقاديرها فينتج

$م = \frac{٣٢٧٤,٣٨}{١,٠٥^{١٦}}$ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فينتج

لو م = لو ٣٢٧٤,٣٨ — ١٦ لو ١,٠٥ او

لو م = ٣,٥١٥١٣ — ١٦ × ٠,٠٢١١٩ أو

لو م = ٣,١٧٦٠٩ ثم نبحث عن العدد المقابل لهذا اللوغاريتم

فيكون م = ١٥٠٠ جنيه

٣١٩ (تنبيه ١) قد يطلق على المبلغ المقترض القيمة الحالية بالنسبة للجملة

(تنبيه ٢) يستعمل القانون (٣) فى حساب الحطيطة الداخلية اذا كانت بالربح المركب فتعتبر فيه الجملة هى القيمة الاسمية والمبلغ هو القيمة الحالية وبحسابها وطرحها من الجملة تنتج الحطيطة الداخلية المطلوبة

٣٢٠ حساب الزمن بعد معرفة المبلغ المقترض والجملة والسعر لذلك نأخذ قانون (١) وهو

$\text{ح} = \text{م}\ \text{ر}^{\text{ن}}$ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فينتج

$\text{لو ح} = \text{لو م} + \text{ن لو ر}$ نستخرج ن فنجد

$$\text{ن} = \frac{\text{لو ح} - \text{لو م}}{\text{لو ر}} \qquad (٤)$$

تطبيق ـ مبلغ ١٥٠٠ جنيه مقترض بسعر ٥./ٰ آل الى جملة قدرها ٣٢٧٤,٣٨ جنيها والمطلوب معرفة الزمن

نضع فى قانون (٤) بدل المعاليم مقاديرها فنجد

$$\text{ن} = \frac{\text{لو } ٣٢٧٤{,}٣٨ - \text{لو } ١٥٠٠}{\text{لو } ١{,}٠٥} \qquad \text{أو}$$

$$\text{ن} = \frac{٣{,}٥١٥٠١٣ - ٣{,}١٧٦٠٩١}{٠{,}٠٢١١٩} \qquad \text{او}$$

$\text{ن} = ١٦$ سنة

٣٢١ حساب السعر بعد معرفة المبلغ والجملة والزمن لذلك نأخذ القانون (١) وهو

$\text{ح} = \text{م}\ \text{ر}^{\text{ن}}$ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين فنجد

$\text{لو ح} = \text{لو م} + \text{ن لو ر}$ ومنه

$$\text{لو ر} = \frac{\text{لو ح} - \text{لو م}}{\text{ن}} \qquad (٥)$$

وبواسطة هذا القانون يمكن حساب مقدار ر ويطرح واحد منه وضرب الباقى فى ١٠٠ ينتج السعر

تطبيق ــ بأى سعر اقترض مبلغ ١٥٠٠ جنيه حتى آل الى جملة قدرها ٣٢٧٤,٣٨ جنيها بالربح المركب فى مدة ١٦ سنة

نضع فى قانون (٥) السابق بدل المعاليم مقاديرها فينتج

$$\text{لو ر} = \frac{\text{لو ٣٢٧٤,٣٨ — لو ١٥٠٠}}{\text{١٦}} \quad \text{أو}$$

$$\text{لو ر} = \frac{\text{٣,٥١٥١٣ — ٣,١٧٦٠٩}}{\text{١٦}}$$

لو ر = ٠,٠٢١١٩ بالبحث عن العدد المقابل له نجد

ر = ١,٠٥ وبناء عليه يكون

ربح الواحد هو ٠,٠٥ وبضربه فى ١٠٠ ينتج ٥ وهو السعر المطلوب

٣٢٢ تنبيهات ــ الاول ــ اذا كان الزمن مبينا بسنين وأشهر فاما أن تحسب جملة الربح المركب للسنين الكاملة ثم يستخرج ربح هذه الجملة ويضاف اليها واما أن يعتبر عدد الأشهر كسرا من السنة

الثانى ــ قد يراد فى بعض الأحيان أن يضاف الربح كل ستة أشهر ففى هذه الحالة يوضع فى القوانين السابقة بدل ى ضعف عدد السنين وبدل ر مقدار مجموع الواحد وربحه فى ٦ أشهر

وكذا اذا أريد أن تكون الاضافة كل أربعة أشهر فيوضع بدل ى ثلاثة أمثال عدد السنين وبدل ر مجموع الواحد وربحه فى ٤ أشهر

وقس على هذا اذا أريد أن تكون الاضافة كل ثلاثة أشهر أو غيرها

الثالث ـ قد يعطى فى منطوق السؤال لوغاريتمات بعض أعداد وبواسطة ذلك وملاحظة قواعد الوغاريتمات ملاحظة جيدة تستنبط اللوغاريتمات المطلوبة أو الاعداد المقابلة للوغاريتمات وعلى الطالب أن أن يلاحظ كل ذلك فى حل بعض التمرينات الآتية

٣٢٣ يمكن بواسـطة قانون الربح المركب حساب مايؤل اليه عدد سكان مدينة بعد عدد معين من السنين اذا علم تعدادها الأصلى وفرض أنها تزيد فى كل سنة بنسبة معينة من عدد السكان

لانه اذا فرض أن تعداد مدينة هو م أنفس وأن تعدادها يزيد فى كل سنة بمقدار ع ٪ بالنسبة لعدد السكان فى السنة التى قبلها فان تعدادها بعد سنة يكون $\text{م} + \frac{\text{م ع}}{١٠٠}$ أو $\text{م}\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right)$ وبعد سنتين يؤل الى $\text{م}\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right)\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right) = \text{م}\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right)^{٢}$ وبالاستمرار على ذلك الى سنين عددها ن يكون جملة تعداد السكان مبينا بالقانون

$$\text{م}\left(١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}\right)^{\text{ن}}$$

فاذا رمز لجملة التعداد بحرف ح و للمقدار $١ + \frac{\text{ع}}{١٠٠}$ بحرف ر يكون

$$\text{ح} = \text{م}\ \text{ر}^{\text{ن}}$$

وهو عين قانون جملة الربح المركب السابق وليلاحظ أن ر فى هذا القانون هو عبارة عن مقـدار مايؤل اليه الواحد من عدد السكان فى السنة (وهو مقدار وهمى فرض للتوصل للمطلوب)

تطبيق ــ سكان مدينة ٥٠٠٠ نفس وتعدادها يزيد فى كل سنة بمقدار ٢٫/٠ والمطلوب معرفة مايؤول اليه عدد السكان بعد ١٠ سنين لذلك نستعمل القانون السابق فنجد

ح = م رن نضع بدل الحروف مقاديرها

ح = ٥٠٠٠ × ١٫٠٢^١٠

ثم نبحث عن مقـدار ١٫٠٢^١٠ بواسـطة اللوغاريتم فنجد أنه ١٫٢١٩
ويكون ح = ٥٠٠٠ × ١٫٢١٩ أو

ح = ٦٠٩٥ نفسا

٣٢٤ تنبيه ــ بواسـطة هـذا القانون تحسب مقادير احدى الكميات م و ن و ر كما تقدم فى قوانين الارباح المركبة

تمـــرين ٧١

(١) مامقدار جملة الربح المركب لمبلغ ٦٠٠٠ جنيه لمدة ١٢ سنة بسعر ٥ ٫/٠

(٢) مامقدار الربح المركب لمبلغ ٥٠٠٠ جنيه لمدة ١٥ سنة بسعر ٦ ٫/٠

(٣) مبلغ ١٠٠٠ جنيه مقترض بالربح المركب لمدة ٥ سنين بسعر ٥ ٫/٠ واذا لم يسدد فى نهايتها يعتبر السعر ٦ ٫/٠ فى الخمس سنين التالية وبسعر ٧ ٫/٠ فى الخمس سـنين الثالثة فـا مقدار مايؤول اليه المبلغ المذكور بعد ١٥ سنة

(٤) احسب الربح المركب لمبلغ ١٥٠٠ جنيه فى مدة ٣ سنين على حساب ٢ ٫/٠ عن كل ٤ أشهر وأن تضاف الارباح كل أربعة أشهر

(٥) وضع مبلغ ١٠٠٠ جنيه فى بنك فى أول سـنة ١٨٨٢ ليربح ربحا مركبا بسعر ٤ ٫/٠ فـا مقدار مايؤول اليه هذا المبلغ فى نهاية سـنة ١٩١١ بعد معرفة أن لـو ١٠٤ = ٢٫٠١٧٠٣٣٣ ولـو ٨٨و٣٢٤٣٣ = ٤٫٥١٠٩٩٩٠

(٦) مامقدار القيمة الحالية لمبلغ ٩٧٦و٦ جنيها مقترض بالربح المركب بسعر ٥و٤ ./. لمدة ٦ سنين

(٧) ما مقدار المبلغ المقترض بسعر ٨ ./. حتى آل الى جملة قدرها ٦٠٠٠ جنيه فى مدة ٢٠ سنة بفرض أن لـو ٢ = ٣٠١٠٣و٠ ولـو ٣ = ٤٧٧١٢و٠ ولـو ١٢٨٧٥ = ١٠٩٧٥و٤

(٨) ما مقدار القيمة الحالية لمبلغ ٣٠٠٠ جنيه يستحق الدفع بعد ١٢ سنة بالارباح المركبة وأن يكون السعر ٣ ./. فى ثلاث السنين الاولى ثم بزيادة ١ ./. فى كل ٣ سنين بالتوالى

(٩) ما مقدار المبلغ الذى اذا وضع فى بنك ليربح ربحا مركبا بسعر ٣ ./. تبلغ أرباحه فى ١٥ سنة مبلغا قدره ٢٠ جنيها

(١٠) ما مقدار الحطيطة الداخلية لمبلغ ١٦ شلن و ١٦١ جنيها انجليزيا يستحق الدفع بعد سنتين بسعر ٦ ./. بحساب الارباح المركبة

(١١) حسب المدة التى فيها الربح المركب لمبلغ ٤٥٠٠ جنيه بسعر ٣ ./. هو ٤١٦ جنيها

(١٢) مبلغ ٥٠٠ جنيه انجليزى مقترض بالربح المركب بسعر ٦ ./. آل الى جملة قدرها ٣٥١ جنيها انجليزيا و ١٦ شلنا أوجد المدة

(١٣) ماهى المدة التى يؤول فيها أى مبلغ مقترض بالربح المركب الى عشرة أمثال قيمته الاصلية اذا كان السعر ٥ و ٥ ./. مع العلم بأن لـو ١٠٥٥ = ٠٢٣٢٥٢٥و٣

(١٤) ماهو السعر المقترض به مبلغ ١٠٠٠ جنيه لمدة ١٢ سنة بالربح المركب حتى آل الى جملة قدرها ١٩٠٤ جنيه

(١٥) ماهو السعر المقترض به ٢٠٠٠ جنيه لمدة ٥ سنين بالربح المركب حتى آل الى جملة قدرها ٢٨٩٤ جنيه وكانت اضافة الارباح كل ٤ أشهر

(١٦) ما السعر المقترض به ٨٠٠٠ جنيه بالربح المركب حتى آل الى ١٢٤٢٠ جنيها فى ١٠ سنين

(١٧) أوجد السعر المقترض به مبلغ ٢٠٠٠ جنيه بالربح المركب مدة عشرين سنة حتى آل الى ١٢٠٠٠ جنيه مع العلم بأن لــو ٢ = ٠٫٣٠١٠٣ ولــو ٣ = ٠٫٤٧٧١٢ ولــو ١٠٩٦٢٥ = ٥٫٠٣٨٩١

(١٨) اذا علم أن الربح المركب لمبلغ ٣٠٠ جنيه فى مدة أربع سنين ٧٨٫٧ جنيها فما ذا تكون جملة ١٠٠٠ جنيه فى ١٠ سنين بالسعر عينه

(١٩) شخص اقترض مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه لمدة خمس ســنوات بسعر ٣٫٥ ./. ثم اقرض نصف هــذا المبلغ لشخص بسعر ٤٫٥ ./. لمدة ٤ سنوات ولآخر باقيه لمدة ٤ سنوات أيضا بسعر ٥ ./. فما فائدته من ذلك

(٢٠) اقترض مبلغ بالربح المركب فكان ربحه فى آخر الســنة الاولى ٨١ جنيها وفى آخر السنة الثانية ٨٥٫٠٦٨٠ جنيها والمطلوب معرفة الربح المركب لهذا المبلغ فى ٥ ســنين بالسعر عينه

(٢١) ماهو السعر الذى يقترض به أى مبلغ حتى يكون مقدار الربح المركب مساويا لرأس المال فى مدة ١٠ سنين

(٢٢) اذا كان عدد سكان دولة ٤٠ مليون نفس وكان هذا العدد يزيد فى كل سنة بمقدار $\frac{١}{٣}$ ./. ($\frac{١}{٣٠٠}$) من عدد السكان فى السنة السابقة لها فما يؤول اليه عدد سكانها بعد قرن كامل

(٢٣) مدينتان يبلغ تعداد سكان احداهما ٢٠٠٠٠٠٠ نفس والاخرى ٣٠٠٠٠٠ نفس فاذا فرض أن الاولى تزيد بمقدار $\frac{١}{٢}$ ./. فى السنة أى ($\frac{١}{٢٠٠}$) من عدد السكان والثانية تزيد بمقــدار $\frac{١}{٣}$ ./. فى السنة أى ($\frac{١}{٣٠٠}$) من عدد سكانها فبعد كم سنة يتساوى عدد سكان المدينتين

(٢٤) كان تعــداد القطر المصرى فى ســــنة ١٨٩٧ هو ٩٧١٧٢٢٨ نفسا وفى سنة ١٩٠٧ هو ١١٢٨٧٣٥٩ نفسا أوجد النسبة فى المــائة لزيادة عدد السكان سنويا مع العلم بأن لــو ١١٢٨٧٣٥٩ هو ٧٫٠٥٢٦٣٠٩ ولــو ٩٧١٧٫٢٢٨ = ٣٫٩٨٧٥٤٢٤ ولــو ١٠١٫٥ = ٢٫٠٠٦٥٠٨٨

(٢٥) تعداد القطر المصرى فى ١٩٠٧ هو ١١٢٨٧٣٥٩ نفسا فما يكون تعددها ان شاء الله تعالى فى سنة ١٩١٧ على فرض أن النسبة فى المائة لزيادة عدد السكان تكون ١٫٥١ ٪ ومع العلم بأن لو ١١٢٨٧٣٥٩ = ٧٫٠٥٢٦٣٠٩ لو ١٠١٥١ = ٤٫٠٠٦٥٠٨٨ ولو ١٣٫١١٣٠٥ = ١٫١١٧٧١٨٩

الدفعة

٣٢٥ تمهيد اذا اقترض شخص مبلغا بالربح المركب لمدة معينة واراد تسديدهذا المبلغ وأرباحه فى تلك المدةبأقساط سنوية متساوية فيسمى كل قسط منها دفعة سنوية

وكذا اذا اودع شخص مبلغا فى مصرف بالربح المركب لمدة معينة وأراد أن يأخذ هذا المبلغ وأرباحه فى تلك المدة بمقادير متساوية يأخذها كل سنة فيسمى كل مقدار منها دفعة سنوية

وليس الغرض فى الحالتين أن يحسب ربح المبلغ كله ويقسم على عدد السنين انما الغرض أنك اذا حسبت جملة المبلغ فى السنة الاولى وطرحت منها الدفعة الاولى ثم حسبت جملة الباقى وطرحت منه الدفعة الثانية وهكذا الى آخر السنين كانت الدفعة الأخيرة هى الباقى فى السنة الأخيرة وأرباحه فيها

وقد يتفق على أن يكون استلام الدفعة كل ستة أشهر أو كل أربعة أشهر أو كل ثلاثة أشهر أو أقل من ذلك وحينئذ فتحل هذه المدة محل السنة

والدفعة إما أن تستمر لزمن محدد كما فى المثالين السابقين وإما أن تكون مستمرة الى غير نهاية مثل الدفعة التى تستغل من ايجار أراضى الزراعة أو ايجار العقارات وإما أن يبتدأ فى دفعها عقب سنين معينة وتسمى دفعة مؤجلة ومما ذكر يستنتج التعريف الآتى

٣٣٦ الدفعة هى مبلغ ثابت يدفع فى أوقات مخصوصة بشروط معينة فى مقابلة مبلغ آخر محسوب بالربح المركب

والدفعة إما أن تعطى فى كل سنة مرة أو أكثر من مرة واذا لم يبين ذلك تعتبر أنها دفعة سنوية

والقيمة الحالية هى المبلغ الذى يقترض أو يودع للحصول على الدفعة السنوية

٣٣٧ حساب مجموع الدفع ـ اذا فرض أن مبلغا مقترضا بالربح المركب بسعر ع ٪ لسنين عددها ن وأن الدفعة السنوية التى يسدد بها هذا المبلغ هى د ورمز لمجموع الواحد وربحه فى السنة بحرف ر وأريد حساب مجموع الدفع السنوية يقال

اذا فرض أن الدفع لم تسدد فى مواعيدها وحسبت بالارباح المركبة بالسعر عينه فان جملة الدفعة الاولى لسنين عددها ن — ١ هى $د\,ر^{ن-١}$

وجملة الدفعة الثانية لسنين عددها ن — ٢ هى $د\,ر^{ن-٢}$

وجملة الدفعة الثالثة لسنين عددها ن — ٣ هى $د\,ر^{ن-٣}$

وهكذا وجملة الدفعة التى قبل الأخيرة بثلاث سنين هى $د\,ر^{٣}$

وجملة الدفعة التى قبل الأخيرة بسنتين هى $د ر^{٢}$

وجملة الدفعة التى قبل الأخيرة بسنة هى $د ر$

أما الدفعة الأخيرة فهى $د$ (لاربح لها) فاذا رمز لمجموع هذه الدفع بحرف $ح$

يكون $ح = د ر^{ن-١} + د ر^{ن-٢} + د ر^{ن-٣} + \dots د ر + د ر^{٢} + د ر + د$

أو $ح = د (١ + ر + ر^{٢} + ر^{٣} + \dots ر^{ن-٣} + ر^{ن-٢} + ر^{ن-١})$

وما بين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول واحد وأساسها $ر$ فاذا استبدل هذا المجموع بمقداره (٢٨٣)

ينتج $ح = د \cdot \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ ... ... (١)

تطبيق ــ مامقـــدار مجموع الدفع السنوية التى مقـدار كل منها ١٦٠ جنيها لمدة ١٥ سنة بسعر ٦./٠

لذلك نضع فى قانون (١) بدل المعاليم مقاديرها

فينتج $ح = \frac{١٦٠ (١,٠٦^{١٥} - ١)}{,٠٦}$

ثم نبحث عن مقدار $١,٠٦^{١٥}$ بواسطة اللوغاريتم فنجد $١,٠٦^{١٥} = ٢,٣٩٧$ نضع هذا المقدار بدلا عن $١,٠٦^{١٥}$

فينتج $ح = \frac{١٦٠ (٢,٣٩٧ - ١)}{٠,٠٦}$

أو $ح = ٣٧٢٥,٣٣٣$ جنيها

٣٢٨ حساب القيمة الحاليــة لدفعة ســنوية مســتمرة الدفع لسنين معينة بسعر معلوم بحساب الربح المركب

نفرض أن $د$ الدفعة الســنوية و $ر$ مجموع الواحد وربحه فى ســنة واحدة و $ن$ عدد السنين و $م$ القيمة الحالية المطلوبة ثم يقال

القيمة الحالية للدفعة $د$ التى تستحق الدفع بعد سنة هى $\frac{د}{ر}$ أو $د\,ر^{-1}$

والقيمة الحاليــة للدفعة $د$ التى تســتحق الدفع بعد سنتين هى $\frac{د}{ر^{2}}$ أو $د\,ر^{-2}$ والقيمة الحالية للدفعة $د$ التى تستحق الدفع بعد ثلاث سنين هى $د\,ر^{-3}$ وهكذا ومن حيث إن مجموع القيم الحالية لهذه الدفعــة هو القيمة الحالية المطلوبة المرموز لها بحرف $م$

فيكون $م = د\,ر^{-1} + د\,ر^{-2} + د\,ر^{-3} \dots ن$ حدود

أو $م = د\,(ر^{-1} + ر^{-2} + ر^{-3} \dots ن$ حدود)

وما بين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول $ر^{-1}$ وأساسها $ر^{-1}$ فاذا استبدل هذا المجموع بمقداره (٢٨٤)

ينتج $$م = د \cdot \frac{ر^{-1}\left(1 - ر^{-ن}\right)}{1 - ر^{-1}}$$

وبضرب حدى الكسر فى $ر$

ينتج $$م = د \cdot \frac{1 - ر^{-ن}}{ر - 1} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (٢)$$

وهــذا هو القانون الذى تحسب بواسطته القيمة الحالية أى المبلغ الذى يقترض أو يودع فى مصرف للحصول على دفعة ســنوية معلومة المقدار بسعر معين فى زمن محدود

تطبيق ـ مامقدار القيمة الحالية لدفعة سنوية مقدارها ١٦٠ جنيها تستمر مدة ١٥ سنة بسعر ٦٪

نضع فى قانون (٢) بدل المعاليم مقاديرها

فينتج $\text{م} = \frac{\text{١٦٠}(\text{١} - \text{١,٠٦}^{-\text{١٥}})}{\text{٠,٠٦}}$

ثم نبحث عن مقدار $\text{١,٠٦}^{-\text{١٥}}$ فنجد أنه عبارة عن ٠,٤١٧٢١

فيكون $\text{م} = \frac{\text{١٦٠}(\text{١} - \text{٠,٤١٧٢١})}{\text{٠,٠٦}}$

أو $\text{م} = \text{١٥٥٤,١٠٦}$ جنيها

٣٢٩ القيمة الحالية لدفعة مستديمة ـ اذا كان عدد السنين ن غير محدود فان القانون (٢) وهو

$$\text{م} = \text{د} \, \frac{(\text{١} - \text{ر}^{-\text{ن}})}{\text{ر} - \text{١}}$$

يمكن وضعه $\text{م} = \frac{\text{د}}{\text{ر} - \text{١}} - \frac{\text{د ر}^{-\text{ن}}}{\text{ر} - \text{١}}$

والكسر الثانى يأخذ فى الصغر كلما كبر مقدار ن وحينئذ فمتى كان ن غير منته ينعدم هذا الكسر ويصير

$$\text{م} = \frac{\text{د}}{\text{ر} - \text{١}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\text{٣})$$

تطبيق ـ مامقدار القيمة الحالية لدفعة دائمية مقدارها ١٢٠ جنيها فى السنة على حساب ٦ ٪

نضع فى قانون (٣) بدل الحروف مقاديرها

فينتج $\text{م} = \frac{\text{١٢٠}}{\text{,٠٦}} = \text{٢٠٠٠}$ جنيه

وفى الواقع أن ربح ٢٠٠٠ جنيــه فى السنة بسعر ٦٠/٠ هو ١٢٠ جنيها فما دام مبلغ ٢٠٠٠ جنيــه موضوعا فى مصرف بســعر ٦٠/٠ يتحصل منه ايراد سنوى ١٢٠ جنيها

٣٣٠ بواسطة القانون (٢) يمكن حساب كل من ى و ن متى علمت باقى الكميات

أولا ـ حساب الدفعــة اذا علمت القيمة الحالية والزمن والسعر نأخذ قانون (٢).

وهو
$$\text{م} = \frac{\text{ى}\left(\text{١} - \text{ر}^{-\text{ن}}\right)}{\text{ر} - \text{١}}$$

نحذف المقام فينتج $\text{م}\left(\text{ر} - \text{١}\right) = \text{ى}\left(\text{١} - \text{ر}^{-\text{ن}}\right)$

نقسم الطرفين على مكرر ى فينتج $\text{ى} = \frac{\text{م}\left(\text{ر} - \text{١}\right)}{\text{١} - \text{ر}^{-\text{ن}}}$ ... ... (٤)

تطبيق ـ ما مقدار الدفعة السـنوية التى تعطى مدة ١٥ سـنة فى مقابلة مبلغ ١٥٥٤,١٠٦ جنيها بسعر ٦٠/٠

نضع فى قانون (٤) بدل الحروف مقاديرها

فينتج
$$\text{ى} = \frac{\text{١٥٥٤,١٠٦} \times \text{٠,٠٦}}{\text{١} - \text{١,٠٦}^{-\text{١٥}}}$$

ثم نبحث عن مقدار $\text{١,٠٦}^{-\text{١٥}}$ بواسطة اللوغاريتم فنجده ٠,٤١٧٢١ نضع هذا المقدار بدله

فينتج $$\text{د} = \frac{\text{١٥٥٤,١٠٦} \times \text{٠,٠٦}}{\text{١} - \text{٠,٤١٧٢١}}$$

أو $$\text{د} = \frac{\text{٩٣,٢٤٦٣٦}}{\text{٠,٥٨٢٧٩}}$$

أو $\text{د} = \text{١٥٩,٩٨}$ جنيها أو ١٦٠ جنيها تقريبا

ثانيا ـ حساب الزمن اذا علمت الدفعة والقيمة الحاليـة والسعر

نأخذ قانون (٢)

وهو $$\text{م} = \frac{\text{د}\left(\text{١} - \text{ر}^{-\text{ن}}\right)}{\text{ر} - \text{١}}$$

ونضرب البسط والمقام فى $\text{ر}^{\text{ن}}$

$$\text{م} = \frac{\text{د}\left(\text{ر}^{\text{ن}} - \text{١}\right)}{\text{ر}^{\text{ن}}\left(\text{ر} - \text{١}\right)}$$

نحذف المقام فينتج $\text{م}\,\text{ر}^{\text{ن}}\left(\text{ر} - \text{١}\right) = \text{د}\,\text{ر}^{\text{ن}} - \text{د}$

أو $$\text{د} = \text{د}\,\text{ر}^{\text{ن}} - \text{م}\,\text{ر}^{\text{ن}}\left(\text{ر} - \text{١}\right)$$

نأخذ $\text{ر}^{\text{ن}}$ مضروبا مشتركا

$$\text{د} = \text{ر}^{\text{ن}}\left[\text{د} - \text{م}\left(\text{ر} - \text{١}\right)\right]$$

نأخذ لوغاريتم الطرفين

$$\text{لو د} = \text{ن لو ر} + \text{لو}\left[\text{د} - \text{م}\left(\text{ر} - \text{١}\right)\right]$$

ومنه $$\text{ن} = \frac{\text{لو د} - \text{لو}\left[\text{د} - \text{م}\left(\text{ر} - \text{١}\right)\right]}{\text{لو ر}} \quad \ldots \; (\text{٥})$$

تطبيق ـ فى كم سنة يمكن تسديد مبلغ ١٥٥٤,١٠٦ جنيها مقترضا بسعر ٦٠/٠ بدفع سنوية مقدار الواحدة منها ١٦٠ جنيها

نضع فى قانون (٥) السابق بدل الحروف مقاديرها

فينتج $$\text{ن} = \frac{\text{لو ١٦٠ — لو (١٦٠ — ١٥٥٤،١٠٦ × ،٠٦)}}{\text{لو ١،٠٦}}$$

أو $$\text{ن} = \frac{\text{لو ١٦٠ — لو ٦٦،٧٥٣٦٤}}{\text{لو ١،٠٦}}$$

أو $$\text{ن} = \frac{\text{٢،٢٠٤١٢ — ١،٨٢٤٤٥}}{\text{٠،٠٢٥٣١}}$$

أو $$\text{ن} = \text{١٥ سنة}$$

٣٣١ تنبيه [١] يمكن حساب القيمة الحالية بواسطة قانون مجموع الدفع (٣٢٧) لانه اذا لوحظ أن مجموع الدفع يساوى القيمة الحالية مع ربحها المركب وأن جملة القيمة الحالية هى م $\text{ر}^{\text{ن}}$

فيكون $$\text{م}\,\text{ر}^{\text{ن}} = \frac{\text{د}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

ومنه $$\text{م} = \frac{\text{د}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر}^{\text{ن}}\,(\text{ر} - ١)} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ (٦)$$

وهذا القانون هو عين قانون (٢) بعد ضرب البسط والمقام فى $\text{ر}^{\text{ن}}$ ويمكن أن يستنتج منه مقدار كل من د و ن بطريقة مشابهة لما تقدم بنمرة (٣٣٠)

٣٣٢ تنبيه [٢] ما تقدم ذكره بنمرتى (٣٢٨) و (٣٣٠) يسمى بالاستهلاك أى استهلاك سلفة مقترضة فى مدة معينة من السنين. والقوانين التى ذكرت بها مفيدة جدا فى حساب الاستهلاك

٣٣٣ * الدفعة المؤجلة هى التى يبتدأ فى دفعها بعد اقتراض مبلغ (أو وضعه فى مصرف) بمدة أكثر من سنة.

٣٣٤ * يمكن ايجاد القيمة الحالية للدفعة المؤجلة بطريقة مشابهة لما تقدم بنمرة ٣٢٨ أى بواسطة متوالية هندسية حدها الاول يكون هو القيمة الحالية للدفعة غير أنه يلاحظ أنها تدفع بعد عدد معين من السنين.

فاذا فرض أن المطلوب ايجاد القيمة الحالية للدفعة د التى يؤجل دفعها عقب سنين عددها ه ثم تدفع الى سنين عددها ن يقال

القيمة الحالية للدفعة الاولى هى $\frac{د}{ر^{ه}}$ والقيمة الحالية للدفعة الثانية هى $\frac{د}{ر^{ه+1}}$ وهكذا وحينئذ فالقيمة الحالية المطلوبة نحصل عليها بجمع السلسلة $\frac{د}{ر^{ه}} + \frac{د}{ر^{ه+1}} + \frac{د}{ر^{ه+2}}$ ..... وهكذا الى ن حدود فاذا رمز لمجموع هذه الحدود بحرف ح وأخذ $\frac{د}{ر^{ه}}$ مضروبا مشتركا ينتج

$ح = \frac{د}{ر^{ه}}(1 + ر^{-1} + ر^{-2} + ر^{-3}$ .... وهكذا الى ن حدود)

يحسن ترك دراسة كل ما وجد عليه هذه العلامة (*) من هذا المبحث فى أول مرة لانه لم يشترط دراسته فى برنامج التعليم الثانوى وانما أتينا به لاتمام الفائدة ولربما يرا آى للمدرس لزومه

ومن حيث ان مابين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الأول واحد وأساسها $ر^{-1}$ وعدد حدودها ن

فيكون $ح = \frac{ى}{ر^{هـ}} \times \frac{1 - ر^{-ن}}{1 - ر^{-1}}$

ثم نحلل الكسر الاول الى عاملين أحدهما $\frac{1}{ر}$

فيكون $ح = \frac{ى}{ر^{هـ-1}} \times \frac{1}{ر} \times \frac{1 - ر^{-ن}}{1 - ر^{-1}}$

أو $ح = \frac{ى}{ر^{هـ-1}} \times \frac{1 - ر^{-ن}}{ر - 1}$

أو $ح = \frac{ى}{ر - 1} \times \frac{1 - ر^{-ن}}{ر^{هـ-1}}$

أو $ح = \frac{ى}{ر - 1} \times \left(ر^{-هـ+1} - ر^{-ن-هـ+1}\right)$ (٦)

تطبيق ـ المطلوب حساب المبلغ الذى يمكن تسديده مع أرباحه بسعر ٤ ٪ بست دفع متساوية كل منها ١٠ جنيهات اذا كانت الدفعة الاولى تدفع بعد ١٠ سنين من استلام المبلغ

نضع فى قانون (٦) بدل الحروف مقاديرها

فينتج $ح = \frac{١٠}{٠,٠٤}\left(١,٠٤^{-٩} - ١,٠٤^{-١٥}\right)$

ثم نبحث عن مقدارى $١,٠٤^{-٩}$ ، $١,٠٤^{-١٥}$ بواسطة اللوغاريتم

فنجد $١,٠٤^{-٩} = ٠,٧٠٣١$ ، $١,٠٤^{-١٥} = ٠,٥٥٥٩$

وحينئذ يكون ح = ٢٥٠ (٠,٧٠٣١ — ٠,٥٥٥٩)

أو ح = ٢٥٠ × ٠,١٤٧٢

أو ح = ٨٠٠ مليم ٣٦ جنيه

٣٣٥ * الدفعة المتجمدة ــ (الوضع السنوى) اذا استمر شخص على وضع مبلغ ثابت كل سنة لمدة معينة من السنين بالربح المركب فان ماتؤول اليه هذه المبالغ وأرباحها يسمى بجملة الدفعة المتجمدة

٣٣٦ * حساب جملة الدفعة المتجمدة ــ اذا وضع شخص مبلغا معينا مقداره م فى نهاية كل سنة بسعر ٤٪ واستمر على ذلك مدة ن سنين ورمز لمجموع الواحد وربحه فى السنة بحرف ر ولجملة ماتؤول اليه الدفع بحرف ح نجد ما يستحقه فى نهاية السنة الاولى هو المبلغ م وما يستحقه فى نهاية السنة الثانية هو م مع جملة م فى سنة أى م + م ر أو م (١ + ر) وجملة مايستحقه فى نهاية السنة الثالثة هو م مع جملة المستحق لغاية السنة الثانية الذى هو م (١ + ر) أعنى م + م (١ + ر) ر = م + م ر + م ر وبالاستمرار على نحو ماذكر الى سنين عددها ن

يكون ح = م (١ + ر + $ر^{٢}$ + ر + ر + ... الى حدود ن)

وما بين القوسين هو عبارة عن مجموع حدود متوالية هندسية حدها الاول ١ وأساسها ر فاذا استعيض بمقداره

يكون ح = $\frac{م(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ... ... (٧)

تطبيق ـ شخص يوفر كل سنة ١٠ جنيهات ويضع هـذا المبلغ فى انتهاء السنة فى بنك توفير بسعر ٢٫٥ ٪ فما جملة مايوفره فى ١٥ سنة

نضع فى قانون (٧) بدل الحروف مقاديرها

فنجد $$\text{ح} = \frac{١٠\,(١٫٠٢٥^{١٥} - ١)}{٠٫٠٢٥}$$

ثم نبحث عن مقدار $١٫٠٢٥^{١٥}$ بواسطة اللوغاريتم فنجد أنه يساوى ١٫٤٤٨ واذن

يكون $$\text{ح} = \frac{٠٫٤٤٨ \times ١٠}{٠٫٠٢٥} = ١٧٩ \;\; ٢٠٠$$ (جنيه ١٧٩ ملـيم ٢٠٠)

٣٣٧ * تنبيه (١) من قانون (٧) يمكن أن يستخرج مقدار كل من م و ن اذا علمت باقى الكميات

أولا لحساب م نأخذ القانون (٧)

وهو $$\text{ح} = \frac{\text{م}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

ومنه $$\text{م} = \frac{\text{ح}\,(\text{ر} - ١)}{\text{ر}^{\text{ن}} - ١} \quad \text{... ... ...} \quad (٨)$$

ثانيا لحساب ن نأخذ القانون (٧)

وهو $$\text{ح} = \frac{\text{م}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$$

ونحذف المقام فينتج $\text{ح}\,(\text{ر} - ١) = \text{م}\,\text{ر}^{\text{ن}} - \text{م}$

أو $\text{ح}\,(\text{ر} - ١) + \text{م} = \text{م}\,\text{ر}^{\text{ن}}$

أو $\text{ر}^{\text{ن}} = \frac{\text{حـ}(\text{ر} - ١) + \text{م}}{\text{م}}$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نجد

$\text{ن لو ر} = \text{لو}[\text{حـ}(\text{ر} - ١) + \text{م}] - \text{لو م}$

ومنه $\text{ن} = \frac{\text{لو}[\text{حـ}(\text{ر} - ١) + \text{م}] - \text{لو م}}{\text{لو ر}}$ ... ... (٩)

٣٣٨ * تنبيه (٢) قد بنينا حساب القانون (٧) على أن الدفعة كانت توضع آخر كل سـنة وحينئذ فالدفعة الأخيرة أى التى توضع فى نهايةالسنة النونية لايكن لها ربح مطلقا

أما اذا فرض أن الوضع كان فىأول كل سنة (أى اعتبر وقت وضع المبلغ هو أول السنة) كانت كل دفعة لها أرباح بمقدار ماتمكثه والدفعة الأخيرة يكون لها ربح سـنة وباتباع الرموز المتقـدمة فى (٣٣٦) وملاحظة أن مايستحقه الواضع فى نهاية السنة الاولى هو م ر تكون جملة الدفع المتجمدة هى

$\text{حـ} = \text{م}(\text{ر} + \text{ر}^{٢} + \text{ر}^{٣} \ldots\ \text{الى ن حدود})$

ويكون $\text{حـ} = \frac{\text{م}(\text{ر}^{\text{ن}+١} - \text{ر})}{(\text{ر} - ١)}$

أو $\text{حـ} = \frac{\text{م ر}(\text{ر}^{\text{ن}} - ١)}{\text{ر} - ١}$ ... ... (١٠)

وهذا القانون يمكن الحساب على موجبه اذا اعتبر أن الدفعـة السنوية تدفع أول كل سنة

تطبيق ـ شخص يضع فى أول كل سنة ١٠ جنيهات فى بنك توفير بسعر ٢,٥ ٪ لمدة ١٥ سنة فما مقدار مايستحقه فى نهاية هذه المدة

لذلك نضع فى قانون (١٠) بدل الحروف مقاديرها

فنجد $$\text{ح} = \frac{10 \times 1{,}025\ (1{,}025^{15} - 1)}{0{,}025}$$

ثم نبحث عن مقدار ١,٠٢٥^١٥ فنجد أنه عبارة عن ١,٤٤٨ وحينئذ

يكون $$\text{ح} = \frac{10 \times 1{,}025 \times 0{,}448}{0{,}025}$$

أو $\text{ح} =$ ١٨٣,٦٨٠ جنيها

ملاحظة ــ اذا قورن بين هذا المقدار والمقــدار الناتج فى مسئلة نمرة ٣٣٦ نجدأن بينهما فرقا مقداره ٤,٤٨٠ جنيهات وهذا الفرق هو الربح المركب لمبلغ ١٠ جنيه فى ١٥ سنة

لانه بمقارنة القانونين ١٠ و ٧ والرمز للجملتين بحرفى ح و حَ

نجد $$\text{ح} - \text{حَ} = \frac{\text{م}\,\text{ر}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - 1) - \text{م}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)}{\text{ر} - 1}$$

أو $$\text{ح} - \text{حَ} = \frac{\text{م}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)(\text{ر} - 1)}{\text{ر} - 1}$$

او $$\text{ح} - \text{حَ} = \text{م}\,(\text{ر}^{\text{ن}} - 1)$$

وهذا هو مقدار الربح المركب للمبلغ م فى ن سنين .

٣٣٩ * تنبيه من قانون (١٠) السابق يمكن استخراج كل من م و ن متى علمت باقى الكميات بطريقة مشابهة لما تقدم بنمرة ٣٣٧

فيوجد أن $م = \frac{ح(ر - ١)}{ر(ر^{ن} - ١)}$

وان $ن = \frac{لو[ح(ر - ١) + م ر] - لو م}{لو ر}$

وعلى الطالب أن يتمرن بنفسه على كيفية استخراج هذين القانونين

٣٤٠ · تقدم بنمرة ٣٢٠ أن القيمة الحالية لدفعة سنوية مستديمة تبين بالقانون (٣) وهو $م = \frac{ى}{ر - ١}$ وهـذا القانون يمكن أن يكتب هكذا $م = \frac{ى}{ب}$ بجعل ب رمزا لربح الوحدة

ومن الواضح أنه اذا قسمت القيمة الحالية م على الدفعة السنوية المستديمة ى يدل الخارج على عدد السنين التى يمكن فيها الحصول على أرباح تعادل القيمة الحالية وعدد هذه السنين يسمى عدد سنين الشراء

فاذا رمز لعدد سنى الشراء بحرف هـ يكون $هـ = \frac{م}{ى}$ ويقال ان الدفعة من ذات هـ سنين شراء

ويؤخذ من هذا أن $م = هـ ى$ فاذا وضع هذا المقدار بدلا عن م فى قانون (٣) السابق الاشارة اليه نجد

$$هـ ى = \frac{ى}{ب} \text{ أو } هـ = \frac{١}{ب} = \frac{١٠٠}{ع}$$

أعنى ان عدد سنى الشراء لدفعة سنوية مستديمة يساوى خارج قسمة مائة على سعرها ومن القانون $هـ = \frac{١٠٠}{ع}$ يؤخذ أن $ع = \frac{١٠٠}{هـ}$ أعنى أن سعر الربح يساوى خارج قسمة مائة على عدد سنى الشراء

وأعظم ثقة فى السندات المالية المستديمة يستدل عليها بعدد سنى الشراء أى بقسمة ثمن الشراء على سعر الربح السنوى

فسندات ٥ر٢ ٪ التى تشترى بسعر ½ ٩٠ هى بقيمة ٣٧ سنة
وسندات ٤ ٪ « « « ٩٦ « « ٢٤ «
وسندات ٥ ٪ « « « ٨٠ « « ١٦ «

٣٤١ ريع أراضى الزراعة — الابعـادية الحرة هى الاراضى الزراعية التى ينتج منها ريع سنوى

ويمكن اعتبار ريع الابعـادية الحرة أنه دفعة سنوية مستديمة لثمن شرائها وبناء على ماتقدم فى النمرة السابقة يكون عدد سنى الشراء يساوى خارج قسمة الثمن على مقدار الريع ويؤخذ من هذا أن مقدار الريع يساوى خارج قسمة الثمن على عدد سنى الشراء

ويعلم ممـا ذكر بالنمرة السابقة أن سعر الربح يساوى خارج قسمة مائة على عدد سنى الشراء

(مثال ١) أرض ثمن الفدان منها ٢٠٠ جنيه ويستغل من الفدان ايراد قيمته ٥ر١٢ جنيها سنويا فمـا عدد سنى الشراء

عدد سنى الشراء = $\frac{٢٠٠}{١٢٫٥}$ = ١٦ سنة

(مثال ٢) أرض ثمن الفدان منها ١٩٥ جنيها شريت على حساب ٢٠ سنة فبكم يؤجر الفدان منها

ايجار الفدان = $\frac{١٩٥}{٢٠}$ ≐ ٧٥ر٩ جنيهات

(مثال ٣) أرض يؤجر الفدان منها بمبلغ ١٠ جنيهات فبكم يشترى الفدان اذا فرض أن عدد سنى الشراء ١٨ سنة

ثمن الفدان ١٠ × ١٨ = ١٨٠ جنيها

(مثال ٤) أرض شريت بحساب الفدان ١٨٠ جنيه ويؤجر بمبلغ ١٠ جنيهات فما سعر الربح

اولا $\frac{١٨٠}{١٠}$ = ١٨ عدد سنى الشراء

ثانيا $\frac{١٠٠}{١٨}$ = ٥ $\frac{٥}{٩}$ جنيهات سعر الربح

ويمكن الحصول على سعر الربح مباشرة باعتبار ١٠ جنيهات ربحا لمبلغ ١٨٠ جنيه ومنه يستخرج السعر فيوجد أنه ٥ $\frac{٥}{٩}$ جنيهات

٣٤٣ العقارات وايجارها ـ يمكن اعتبار أن الأجرة السنوية لعقار هى دفعة سنوية مستديمة لثمنه

ومن المعتاد ن يعتبر عدد سنى الشراء من ١٢ الى ١٥ سنة فى العمارات المستجدة الانشاء ومن ٨ الى ١٠ فى متوسطة الانشاء ويتنوع عدد سنى الشراء بحسب جودة المبانى وما استعمل فيها من المواد ولا حاجة لايراد أمثلة على العقارات اكتفاء بما ذكر فى أراضى الزراعة

٣٤٤ تنبيه ـ يلاحظ استبعاد قيمة الضرائب (الخراج والعشور) فى مسائل أراضى الزراعة واستبعاد قيمة الحكر على العقار وما يلزم له من نفقة الاصلاح لاستمرار بقائه من الايراد السنوى

تمرين ٧٢

(١) ما مقدار مجموع الدفع السنوية التى كل منها ٥٠ جنيها المدة ١٥ سنة باعتبار الربح المركب بسعر ٤ ./. بفرض أن لو ١ر٠٤ = ٠ر٠١٧٠٣ ولو ١٨٠٠٧٥ = ٥ر٢٥٥٣٥

(٢) مامقدار القيمة الحالية لدفعة سنوية مقدارها ٢٠ جنيها لمدة ٦ سنين بسعره ٥٪.
مع العلم بأن لو ١٫٠٥ = ٠٫٠٢١١٨٩٣
ولو ٧٤٦٢١٥ = ٥٫٨٧٢٨٦٤٢

(٣) أوجد القيمة الحالية لدفعة سنوية مقدارها ٣٠٠ جنيه تستمر الدفع لمدة ٢٠ سنة بسعر ٤٫٥٪ بالربح المركب
مع العلم بأن لو ١٫٠٤٥ = ٠٫٠١٩١٢ ولو ٤١٤٥٧ = ٤٫٦١٧٦

(٤) مامقدار المبلغ المقترض بسعر ٤٫٥٪ وسدد فى ١٦ سنة بدفع سنوية قيمة الواحدة منها ١٧٧٩٫٩ جنيها

(٥) ماالذى يلزم وضعه للحصول على دفعة سنوية مقدارها ٢٥٠ جنيه تستمر الدفع مدة ٩ سنين باعتبار الربح ٤٪

(٦) شخص يقبل أن يكسب ٣٪ على رأس ماله فما المبلغ الذى يدفعه فى شراء سند بمبلغ ١٠٠ جنيه يربح ٤٪ لمدة ١٠ سنين ثم ترد له قيمة الاسمية فى نهاية تلك المدة

(٧) أجر شخص من شركة بناء منزلا بمبلغ ٦٠ جنيها سنويا بشرط أن تتنازل له عنه بعد مضى ٢٠ سنة فاذا كانت هذه الشركة تحسب ٥٪ ايرادا لرؤس أموال المساهمين و $\frac{1}{2}$ ٪ لادارة العمل فما يكون أجرة المنزل سنويا اذا كان يبقى ملكا للشركة

(٨) رجل عمره ٥٤ سنة يأخذ معاش التقاعد وقدره ٢٠٠ جنيه أراد أن يستبدل نصفه بمكافأة فما المبلغ الذى ينبغى أن يأخذه اذا كانت الارباح ٥٪ والزمن الذى يأمل أن يبقاه على قيد الحياة ١٧ سنة

(٩) شخص باع منزلا وقبل أن يأخذ نصف الثمن ويؤجل الباقى على ثلاث سنوات بحيث تحسب له الارباح المركبة بسعر ٥٪ وبذلك كان مقدار الدفعة السنوية التى يأخذها ١٢٥٫٥ جنيه فما مقدار الثمن الحالى للبيت المذكور

(١٠) مامقدار القيمة الحالية لدفعة سنوية مستديمة مقدارها ١٠٠ جنيه بسعر ٤٪.

(١١) شخص أراد أن يشترى لاولاده أطيانا بحيث يحصلون منها على ايراد سنوى قدره ٥٠٠ جنيه فاذا كان ايراد الاطيان هو باعتبار ٦٪ فما مقدار المبلغ الذى يشترى به ذلك وما عدد سنى الشراء

(١٢) مامقدار الدفعة السنوية التى يستهلك بها ٣٠٠٠٠ جنيه مقترضا بسعر ٥ ./. في مدة ١٠ سنين

(١٣) اقترض شخص مبلغ ٢٠٠٠ جنيه بسعر ٥ ./. بالربح المركب ويراد تسديده في ٢٠ سنة بدفع سنوية متساوية تدفع كل سنة مرة فما مقدار كل دفعة منها

(١٤) شركة زراعية اشـترت ٦٠٠٠ فدان ثمن الفدان ٦٥ جنيها وقامت بدفع ثلث الثمن وتعهدت بتسديد الباقى فى ١٥ سـنة وتحسب أرباحه المركبة بسعر ٦ ./. فما مقدار ما يلزم أن تدفعه هذه الشركة سنويا

(١٥) شركة اقترضت ٢٠٠٠٠ جنيه بسعر ٣ ./. ويسدد فى ١٠ سنين مامقدار ما يلزم أن تسدده الشركة فى كل سنة

مع العلم بأن لو ١٠٣ = ٠١٢٨٣٧٢و٠ ولو ٧و٤٤٠٩٤ = ٠و٨٧١٦٢٧٩

(١٦) مزارع أرادأن يشترى ٣٦ فدان بسعر الفدان ٧٥ جنيها ولكنه لا يملك غير ٩٠٠ جنيه ففى كم سنة يمكنه أن يسدد باقى الثمن اذا حسب عليه بالارباح المركبة بسعر ٥ ./. وكان يدفع ماتؤجر به هذه الاطيان على حساب ٥ جنيهات للفدان فى السنة وأن يضم الى ذلك ١٠٠و٣٣ جنيها فى كل سنة

(١٧) ماعدد الدفع التى يستهلك بها مبلغ ١٥٠٠٠ فرنك مقترضا بسعر ٦ ./. اذا كان مقدار الدفعة السنوية ٨و٢٠٣٧ فرنكا

(١٨) رجل له رأس مال قدره ٣٠٠٠ جنيه ويحتاج الى مصروف سـنوى قـدره ٢٧٠ جنيها فاذا كان رأس ماله يربح بسعر ٥ ./. فى السنة فكم سنة يكفيه هذا المبلغ مع أرباحه

(١٩) رجل عنده مبلغ ١٠٠٠٠٠ جنيـه ويحتاج أن يصرف ٧٠٠٠ جنيه فى السنة أشار عليه أحد الماليين بأن يضعه فى مصرف ليربح بسـعر ٥و٣ ./. وبذلك يمكنه أن يكفيه مدة أكثر مما كان يصرفه فيها فما مقدار هذه المدة

مع العلم بأن لو ٢ = ٣٠١٠٣و٠ ولو ٣و٠ = ٤٧٧١٢و٠ ولو ٢٣ = ١و٣٦١٧٣

(٢٠) أبعادية ايرادها السنوى ٢٨٠ جنيها شريت بمبلغ ٧٠٠٠ جنيه أوجد سعر ربحهة

(٢١) دفعة سنوية مسـتديمة قيمتها ٤٠ سـنة شراء أوجد جملة دفعة سنوية مقدارها ٣٠٠ جنيه لمدة ١٠ سنين بالسعر عينه

بفرض أن لو ١٫٠٢٥ = ٠٫٠١٠٧٢ ولو ١٢٨٠ = ٣٫١٠٧٢

(٢٢) * شخص يريد أن يشترى دفعة سنوية مقدارها ٥٠ جنيها تبتدئ بعد ٤٠ وتستمر ٢٠ سنة فكم جنيها يلزم أن يدفعها لذلك اذا اعتبر السعر ٣٫٥ ٪

(٢٣) * زيد يقتصد من ايراده فى كل سنة ٣٠٠ جنيه و يضعها فى انتهاء السنة فى بنك لتربح ربحا مركبا بسعر ٥ ٪ فما مقدار ما اقتصده وأرباحه فى مدة ٢٠ سنة

(٢٤) * رجل يوفر $\frac{1}{3}$ ٣ جنيهات من ايراده الشهرى و يضع ما يوفره فى آخر كل سنة فى بنك ليربح بسعر ٤ ٪ فما جملة ما يوفره فى مدة ٣٠ سنة

(٢٥) * شخص حينما كان عمر ولده ٨ سنين عزم على أن يحجز له مبلغ فى كل سنة و يضعه فى بنك بالارباح المركبة بسعر ٣٫٥ ٪ حتى اذا بلغ ولده سن ١٩ يتكون له من هذه المبالغ وأرباحها مبلغ ٢٠ جنيها فما مقدار ما يلزم أن يضعه فى البنك فى انتهاء كل سنة

(٢٦) * رجل يوفر ع جنيه من ايراده فى السنة و يضع ذلك فى بنك بالربح المركب بسعر ٣٫٥ ٪ فبعد كم سنة يصير عنده رأس مال ربحه مساويا لتوفيره السنوى

(٢٧) * شخص عمره ٣٠ سنة أمن على حياته بمبلغ ١٠٠٠ جنيه تدفع له عند بلوغه سن ٥٥ سنة أو تدفع لورثته عند وفاته فاذا كان ما يدفعه فى أول كل سنة ٤٢ جنيه انجليزى و ١٢ شلن و ٦ بنس وفرض انه استمر على الدفع الى هذا السن فما مقدار مكسب شركة التأمين عند انتهاء المدة اذا اعتبرت الارباح بسعر ٤ ٪ فى السنة

(٢٨) * داوم شخص على وضع مبلغ ٧٢ جنيها فى بنك فى أول كل سنة ليربح ربحا مركبا بسعر ٤٫٥ ٪ فبعد كم سنه ينتج له من مبالغه وأرباحها ١١٦٥٫٢٦ جنيها

(٢٩) * شخص كان يضع فى أول كل سنة مبلغ ٢٠٠ فرنك فى بنك ليربح ربحا مركبا بسعر ٥ ٪ و بعد مدة استلم مبلغ ٤٥٣١٫٨٠ فرنكا فما مقدار المدة التى كانت فيها المبالغ فى البنك

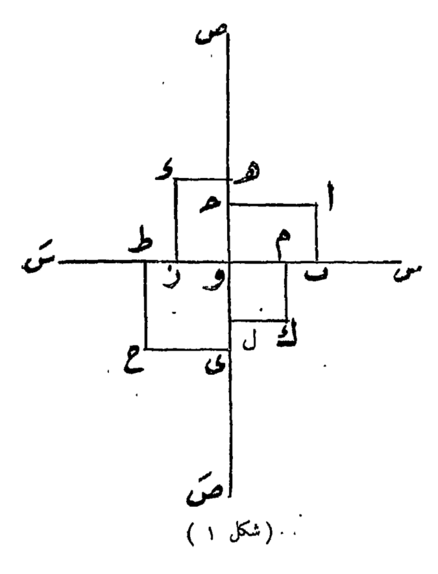
(٣٠) * ما مقدار المبلغ الذى يوضع فى ابتداء كل سنة مدة ١٢ سنة ليربح ربحا مركبا بسعر ٥ ٪ حتى ينتج من هذه المبالغ وأرباحها ١٠٠٠ جنيه مصريا تماما

الرسم البياني

٣٤٣ اذا رسم خطان مستقيان س و سَ ، ص و صَ أحدهما أفقي والآخر رأسي ومتقاطعان على التعامد في نقطة و ينقسم مستويهما الى أربعة أقسام

س و ص ، سَ و ص ، صَ و سَ ، صَ و س

شكل (١) تسمى على التوالى بالربع الأول والثانى والثالث والرابع



(شكل ١)

والخطان المذكوران يسميان محورى الاحداثيات أوخطى المقارنة ويسمى الأفقى محور السينات والرأسى محور الصادات ونقطة تقاطعهما تسمى نقطة أصل الاحداثيات

٣٤٤ تعين وضع نقطة ــ كل نقطة فى المستوى السابق تكون معينة الوضع اذا علم بعداها عن المحورين الاحداثيين سـ سـَ ، صـ صـَ

مثلا فى شكل (١) النقطة ا تكون معينة الوضع اذا علم بعدها عن المحور الأفقى سـ سـَ وهو ا ب وبعدها عن المحور الرأسى صـ صـَ وهو ا حـ

ومن حيث ان البعد ا ب = حـ و وهو جزء من الرأسى صـ صـَ يقال له الاحداثى الرأسى

ومن حيث ان البعد ا حـ = ب و وهو جزء من الأفقى سـ سـَ يقال له الاحداثى الأفقى

وحينئذ اذا علم الاحداثيان وحـ ، وب وأقيم من ب ، حـ عمودان على المحورين يتعين بتقاطعهما وضع نقطة ا

وبمثل ذلك يتعين وضع النقطة ء بمقدمة الاحداثيين و ر ، وهـ واقامة عمودين من ر ، هـ على المحورين فتكون هى نقطة تقاطعهما وكذا يتعين وضع النقطة ع بمعرفة الاحداثيين و ط ، و ى ووضع النقطة ك بمعرفة الاحداثيين و م ، و ل

٣٤٥ اذا فرض أن المحورين سـ سـَ ، صـ صـَ منقسمان بوحدة طولية واحدة ومبدأ التقسيم من و وأمكن أن نقدر الابعاد السابقة بمقادير عددية تؤخذ من أقسام المحورين بالابتداء من نقطة و

وقد اتفق على أن الابعاد التى تؤخذ على المحور الأفقى على يمين نقطة و أى فى الاتجاه و سـ تكون موجبة والابعاد التى تؤخذ عليه على يسار نقطة و أى فى الاتجاه و سـَ تكون سالبة وأن الابعاد التى تؤخذ على المحور الرأسى فى الاتجاه الأعلى و صـ تكون موجبة والتى تؤخذ عليه فى الاتجاه الأسفل تكون سالبة .

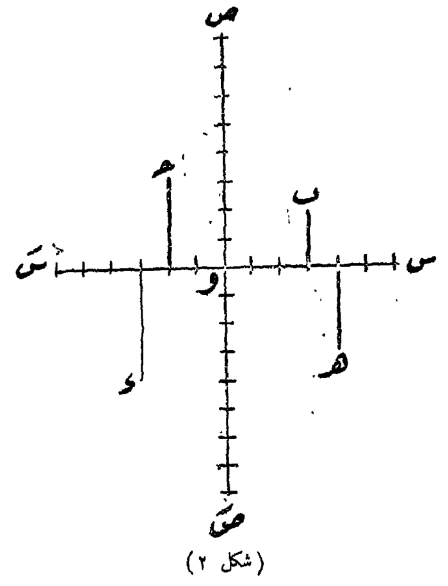
٣٤٦ تنبيه ـ يكفى فى تعيين نقطة أن يؤخذ الاحداثى الأفقى على المحور الأفقى ثم يقام من نهايته عمود وتؤخذ عليه بعد مساوى الاحداثى الرأسى فتكون نهاية هذا البعد هى النقطة المطلوبة

(مثال ١) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها ٣ و ٢

لذلك يرسم محوران سـ سـَ ، صـ صـَ (شكل ٢) متقاطعان على التعامد فى و ثم يؤخذ على و سـ بعد مساوى ٣ وحدات طولية ويقام عمود من نهاية البعد الثالث فى الاتجاه الرأسى الموجب ويؤخذ عليه وحدتان فنهايتهما ب هى النقطة المطلوبة

(مثال ٢) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها ــ ٢ و ٣

يؤخذ على محور السينات فى الاتجـاه و سَ الأفقى السالب بعـد يساوى وحدتين ومن نهايتـه يقام عمود فى الاتجـاه الرأسى الموجب و يؤخذ عليه بعد ٣ وحدات فنهاية هـذا البعـد وهى حـ هى النقطة المطلوبة



(شكل ٢)

(مثال ٣) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها — ٣ ، — ٤:

لذلك يؤخذ على محور السينات فى الاتجـاه و سَ الأفق السالب بعد يساوى ٣ وحدات ومن نهايته يقام عمود فى الاتجاه الرأسى السالب ويؤخذ عليه بعــد ٤ وحدات فنهاية هــذا البعد وهى ء هى النقطة المطلوبة

(مثال ٤) المطلوب تعيين النقطة التى احداثياها ٤ ، — ٣

لذلك يؤخذ على محور السينات فى الاتجـاه و سـ الأفق الموجب بعــد ٤ وحدات ومن نهايتــه يقام عمود فى الاتجاه الرأسى الســالب ويؤخذ عليه ٣ وحدات فنهاية هــذا البعد وهى هـ تكون هى النقطة المطلوبة.

٣٤٧ ملاحظات

(١) احداثيا نقطة الأساس هما (٠,٠)

(٢) الاحداثى السينى لأى نقطة موجودة على المحور الصــادى هو صفر.

(٣) الاحداثى الصــادى لأى نقطة موجــودة على المحور السينى هو صفر.

(٤) بعد أى نقطة مثــل ع احداثياها سـ ، صـ عن الأساس يبين بالمتطابقة و ع٢ = سـ٢ + صـ٢.

٣٤٨ يستحسن فى الرسم البيانى استعمال ورق مقسم الى مربعات صغيرة متساوية وينتخب خطان متعامدان أحدهما أفقى والآخر رأسى يجعلان محورى الاحداثيــات وينبغى تمييزهما بأن يعلّم عليهما بنحو قلم

رصاص واتخاذ نقطة تقاطعهما مبـدأ للاحداثيات ويتخـذ كل جزء أو جزئين أو أكثر من أقسام المحورين وحدة للقياس وبواسطة ذلك يمكن بيان وضع أى نقطة متى علم مقدارا احداثييها

وبالعكس اذا أخذت أى نقطة فى أى ربع أمكن معرفة مقدارى احداثييها بواسطة أقسام الورق

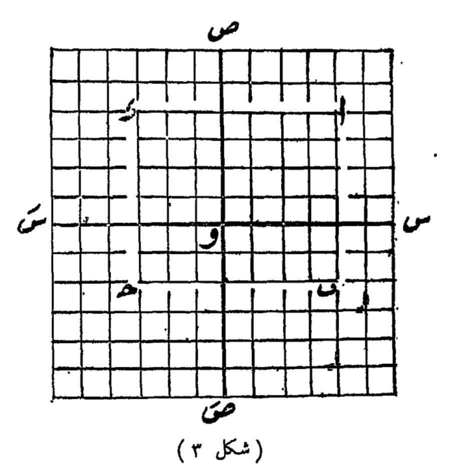
ويمكن معرفة وضع خط اذاعلمت أوضاع نقط كثيرة منه متقاربة وجمعت بخط واحد

ويمكن معرفة وضع مستقيم محدود اذا علم وضع نقطتى نهايتيـه وكذا يمكن معرفة وضـع شكل مستقيم الاضلاع ومساحته اذا علمت نقط رؤسه

(مثال ١) المطلوب تعيين النقط (٤ و ٤) ، (— ٣ و ٤) ، (— ٣ ، — ٢) ، (٤ ، — ٢) على ورق مقسم مربعات وايجاد مساحة الشكل المسـتقيم الاضلاع الحادث من الوصـل بين هذه النقط

يرسم المستقيمان سـ سـَ ، صـ صـَ متقاطعان على التعامد فى ورق مقسم مربعات ثم تعين النقطة (٤ و ٤) بأن يؤخذ على المحور سـ سـَ أربعة أقسام جهة اليمين وعلى العمود المقام من نهـاية القسم الرابع تؤخذ ٤ أقسام الى جهـة أعلى فتتعين النقطة ا ثم تعين النقطة (— ٣ و ٤) بأن يؤخذ على المحور سـ سـَ بعد يساوى ثلاثة أقسام

فى الاتجاه السالب و سـَ وعلى العمود المقام من نهاية هذا البعد فى الاتجاه الأعلى الموجب يؤخذ أربعة أقسام فتتعين نقطة ى



(شكل ٣)

وبمثل ذلك تتعين النقطتان (ـــ٣,ـــ٢) ، (٤,ـــ٢) وليكونا ح ، ب فاذا وصل بين النقط ا ، ب ، ح ، ى بمستقيمات كان الشكل ا ب ح ى هو الشـــكل المطلوب ومساحتـــه هى ٧ × ٦ = ٤٢ وحدة مربعـــة فاذا كانت هـــذه الوحدة هى نصف السنتيمتر كانت هـــذه المساحة ٤٢ من نصف الســـنتيمتر المربع أى ٠,٠٠١٠٥ من المتر المربع

تمرين ٧٣

بين أوضاع كل نقطتين ممـا يأتى على التوالى وصل بينهما بمستقيم

(١) (٢ و ٣) ، (٧ و ٣)
(٢) (٢ و ٣) ، (٤ و ـ٦)
(٣) (٥ و ٥) ، (٣ و ٤)
(٤) (٣ و ٤) ، (ـ٣ و ٤)
(٥) (٠ و ٦) ، (ـ٥ و ٦)
(٦) (ـ٤ و ـ٥) ، (ـ٣ و ـ٧)
(٧) (ـ٥ و ـ٨) ، (ـ٣ و ـ٢)
(٨) (٢ و ـ٥) ، (٢ و ـ٣)
(٩) (٤ و ـ٣) ، (٣ و ـ٤)
(١٠) (٠ و ٣) ، (٥ و ـ٣)
(١١) (٠ و ٦) ، (٣ و ٠)
(١٢) (٠ و ٨) ، (ـ٢ و ٠)
(١٣) (٣ و ٨) ، (ـ٢ و ـ٦)
(١٤) (ـ٢ و ـ٢) ، (٥ و ٥)

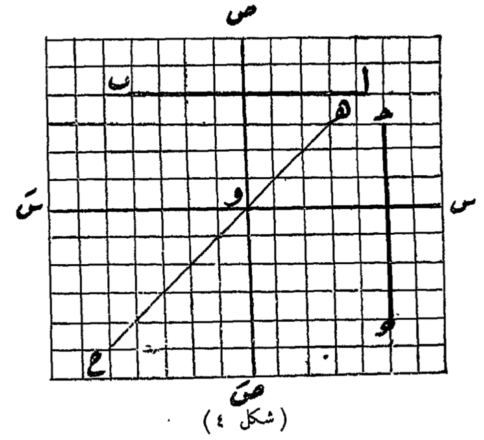
بين على الورق النقط الموضح احداثياتها فى كل ممـا يأتى وصل بينها بخطوط مستقيمة واذكر اسم كل شكل منها و بين مساحته

(١٥) (٣ و ٣) ، (ـ٣ و ٣) ، (ـ٣ و ـ٣) ، (٣ و ـ٣)
(١٦) (٤ و ٠) ، (٠ و ٤) ، (ـ٤ و ٠) ، (٠ و ـ٤)
(١٧) (٠ و ٠) ، (٠ و ١٠) ، (٥ و ٥)
(١٨) (٢ و ٣) ، (٨ و ٣) ، (٤ و ٧) ، (١٠ و ٧)
(١٩) بين أن المثلث الذى رؤسه (٠ و ٠) ، (٠ و ٦) ، (٤ و ٣) يكافىء المثلث الذى رؤســه (٠ و ٠) ، (٠ و ٦) ، (٤ و ٨) و بين مساحة كل منهما

(٢٠) بين النقط (٥ و ٦) ، (—٥ و ٦) ، (—٥ و —٦) ، (٥ و —٦) ثم مساحة الشكل الحادث اذا أخذت الوحدة ١/١٠ البوصة

٣٤٩ يمكن الاستدلال على أوضاع خطوط بالنسبة لمحورى الاحداثيات بمجرد معرفة مقادير احداثياتها ويتضح ذلك بعد ذكر الأمثلة الآتية

(مثال ١) المطلوب تعيين النقط (٥ و ٠) ، (٥ و٣) ، (٥ و — ١) ، (٥ و —٤)



(شكل ٤)

بتعيين هذه النقط كما سبق توجد أنها على المستقيم حـ ء الموازى للمحور الرأسى (شكل ٣)

(مثـال ٢) المطـلوب تعيين النقط (٤ و ٤) ، (٠ و ٤) ، (—١ و ٤) ، (—٤ و ٤)

بتعيين هـذه النقط كما سبق توجد أنهـا على المستقيم ا ب الموازى للحور الأفقى (شكل ٣)

(مثـال ٣) المطلوب تعيين النقط (٢ و ٢) ، (٣ و ٣) ، (—٢ و —٢) ، (—٣ و —٣) ، (—٥ و —٥)

بتعين النقط المذكورة كماسبق توجدأنها على الخط هـ و ع المـار بالأساس والمنصف للزاوية الواقعة بين محورى الاحداثيات (شكل٣)

يؤخذ من الأمثلة السابقة

أوّلا — أن النقط المتحدة فى مقادير احداثياتها الأفقية توجد على مستقيم مواز للحور الرأسى

ثانيـا — أن النقط المتحدة فى مقادير احداثياتها الرأسية توجد على مستقيم مواز للحور الافقى

ثالثا — أن كل نقطة تساوى احداثياها الأفقى والرأسى توجد على المستقيم المنصف للزاوية التى بين المحورين

وكذا يؤخذ من تلك الامثلة عكس كل ماذكر أعنى أن كل مستقيم مواز للحور الرأسى تكون جميع نقطه متحدة فى احداثياتها الأفقية وأن كل مستقيم مواز للحور الأفقى تكون جميع نقطه متحدة فى احداثياتها الرأسية وأن كل مستقيم منصف للزاوية التى بين المحورين تكون كل نقطة من نقطه متساوية الاحداثيين

تمرين ٧٤

المطلوب أن تذكر أوضاع كل من الخطوط المبينة بالنقط الآتية بالنسبة لمحوري الاحداثيات وتحقيق ذلك برسمها رسما بيانيا

(١) (٣و ٢) ، (٣و ٣) ، (٣و ٤) ، (٣و ٧) ، (٣و ١٠)

(٢) (٤ و ٢) ، (٥ و ٢) ، (٦ و ٢) ، (٩ و-٢)

(٣) (٢ و ٢) ، (٣ و ٣) ، (٥ و ٥) ، (٧ و ٧)

(٤) (٤ و ٠) ، (٤ و ٦) ، (٤ و-٤) ، (٤ و-٦)

(٥) (٠ و ٥) ، (٤ و ٥) ، (-٣ و ٥) ، (-٦ و ٥)

(٦) (٠ و ٠) ، (١ و ١) ، (٥ و ٥) ، (٧ و ٧)

(٧) (-٤ و ٢) ، (-٤ و ٤) ، (-٤ و ٦) ، (-٤ و ٨)

(٨) (-٣ و-٢) ، (-٣ و-٣) ، (-٣ و-٤) ، (-٣ و-٥)

(٩) (٢ و-٣) ، (٢ و-٥) ، (٢ و-٧) ، (٢ و-٩)

(١٠) (٠ و ٠) ، (٣ و ٣) ، (-٣و-٣) ، (٥و ٥) ، (-٥و-٥)

الدوال

٣٥٠ كل كمية لا تشتمل الا على مقدار واحد عام فان قيمتها ترتبط بهذا المقدار

فالكمية ٥ س — ٧ تتعلق قيمتها بمقدار س فاذا كان س = ٢ آلت الى — ٣ واذا كان س = ٥ آلت الكمية الى ٨

ويقال لهذه الكمية إنها دالة س وعلى هذا فالكميات

$$٥س — ٧ ، ٦س^{٢} — ٣س + ١٥ ، ٦س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} — ٨$$

هى دوال لكمية س ودرجاتها على التوالى الاولى والثانية والرابعة وتبين أى دالة بالوضع د (س) غالبا

واذا كان د (س) = ص فمن الواضح أنه اذا أعطى مقادير مختلفة لكمية س ينتج لكية ص مقادير مقابلة لها فالمقادير التى تعطى الى س تسمى بالمقادير المطلقة ومقادير ص التى ينتج من الفروض المختلفة تسمى بالمقادير المطابقة لها

فاذا أخذت الدالة ٢ س — ٦ = ص وأعطى الى س مقادير مختلفة مثل ٠ و١ و ٢ و ٣ و ٤ . . . . ينتج لكمية ص مقادير مطابقة لها

فاذا فرض أن س = ٠ يكون ص = — ٦

واذا « « س = ١ « ص = — ٤

« « « س = ٢ « ص = — ٢

« « « س = ٣ « ص = ٠

« « « س = ٤ « ص = ٢

« « « س = ٥ « ص = ٤

« « « س = ٦ « ص = ٦

« « « س = ٧ « ص = ٨ وهكذا

فيشاهد أن قيمة الدالة ابتدأت بمقدار سالب ثم أخذت فى الزيادة ومرت بالصفر وانتقلت الى مقادير موجبة متتالية

وبالاستمرار على هذا المنوال يمكن ايجاد عدد عظيم من مقادير هذه الدالة ولكن لايهمنا غالبا مقادير الدالة الناشئة من تغيير القيمة المطلقة بقدر مايهمنا كيفية تغييرها

الرسم البيـانى للدالة

٣٥١ اذا فرضت كميــة مثل ٣ س — ٢ فان المقـدار الرقمى لهذه الكمية يكون متعلقا بالمقدار الرقمى للحرف س

فاذا فرض أن قيمتها هى ص أى أن ٣ س — ٢ = ص أمكن أن يقال د (س) = ص

واذا أعطى لكمية س مقادير مختلفــة على التوالى يوجد لكمية ص مقادير مرتبطة بمقادير كميــة س فاذا جعلنا كل مقـدارين متطابقين احداثيين أفقى ورأسى لنقطة أمكن أن تعين جملة نقطة اذا وصل بينهما بخط (مستقيم أو منحن) يسمى هذا الخط بالرسم البيانى للدالة أى المتطابقة د (س) = ص

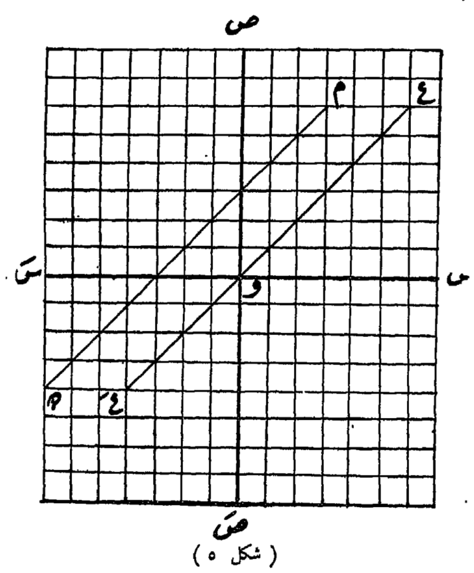
(مثال ١) أوجد الرسم البيانى للتطابقة س = ص

اذا جعـــل س = ٠ أو ١ أو ٢ او ٣ أو ٤ .... أو — ١ أو — ٢ أو — ٣ الخ

يكون صـ = ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ ٠٠٠٠ أو — ١ أو — ٢ أو — ٣ الخ

ثم نجعل كل مقدارين متطابقين احداثيين لنقطة ونعين هذه النقطة وهى

(٠ و ٠) ، (١ و ١) ، (٢ و ٢) ، ٠٠٠٠ ، (— ١ و — ١) ، (— ٢ و — ٢)



(شكل ٥)

فيشاهد (كما فى شكل ٥) أن الرسم البيانى يمر بنقطة و ويبين عدة نقط كل منها متساوية الاحداثيين أى أن يبين بالخط ع و عَ

(مثال ٢) أوجد الرسم البيانى للدا صـ = سـ + ٣
لذلك ترتب مقادير سـ ، صـ كما يأتى

سـ	=	٣	٢	١	٠	١—	٢—	٣—
صـ	=	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠

ثم نعين النقط (٣ و ٦) ، (٢ و ٥) ، (١ و ٤) فيوجد الخط م ى موازيا الى ع و عَ

تنبيه ـ اذا قورن المثال الثانى بالاول يرى أن كل احداثى رأسى فى الثانى يزيد ثلاث وحدات عن نظيره فى الاول وبناء على هذا فالرسم البيانى للمعادلة صـ = سـ + ٣ يمكن ايجاده بواسطة الرسم البيانى للمعادلة صـ = سـ بمد كل احداثى رأسى ثلاث وحدات فى الجهة الايجابية أو السلبية

وبمثل ذلك تكون المعادلتان

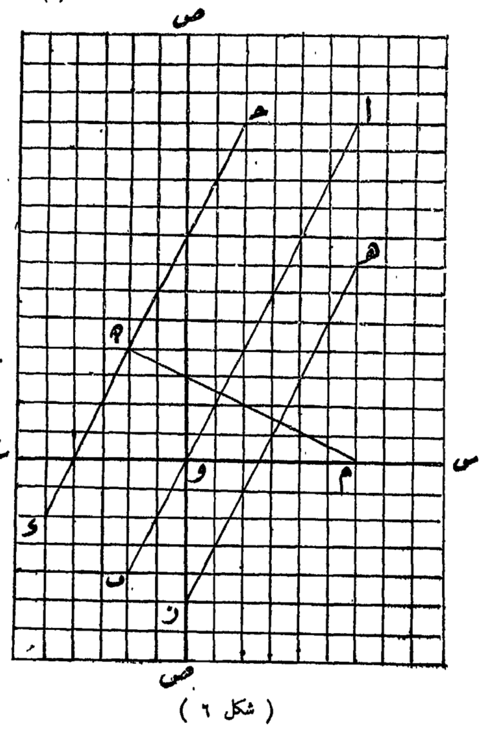
صـ = سـ + ٥ ، صـ = سـ — ٥

دالتـين على خطين متوازيين موجودين فى جهتى الخط المبين بالمعادلة صـ = سـ متساويى البعد عنـه ويتيسر للطالب مشاهدة ذلك بانشائهما

(مثال ٣) أوجد الرسم البيانى للمعادلة صـ = ٢ سـ
ترتب مقادير سـ ، صـ كما يأتى

س	=	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢
ص	=	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢	٠	-٢	-٤

وتعين النقط كما سبق فيوجد الخط ا ب المبين بشكل (٦)



(شكل ٦)

(مثال ٤) أوجد الرسم البيانى للمعادلة ص = ٢ س + ٤

ترتب مقادير س ، ص كما يأتى

س	=	٤	٣	٢	١	٠	١—	٢—	٣—	٤—	الخ
ص	=	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢	٠	٢—	٤—	الخ

وبتعيين هذه النقط يوجد الخط حـ ء المبين (بشكل ٦)

(مثال ٥) أوجد الرسم البيانى للمعادلة ص = ٢ س — ٥

ترتب مقادير س ، ص كما يأتى

س	=	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠
ص	=	٧	٥	٣	١	١—	٣—	٥—

ثم تعين النقط (٦و٧) ، (٥ و ٥) ، (٤ و ٣) . . . الخ كما سبق فيوجد الخط هـ ء المبين (بشكل ٦)

(مثال ٦) أوجد الرسم البيانى للمعادلة ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

ترتب مقادير س ، ص كما يأتى

س	=	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠	١—	٢—
ص	=	٠	$\frac{١}{٢}$	١	١,٥	٢	٢,٥	٣	٣,٥	٤

ثم تعين النقط (٦ و ٠) و (٥ و $\frac{١}{٢}$) و (٤و١) و (٣ و ١ $\frac{١}{٢}$) . .

فيوجد الخط م ن المبين (بشكل ٦)

٣٥٢ يؤخذ مما تقـدم أن كل معادلة ذات درجة أولى ومجهولين يمكن أن تبين بخط مستقيم ومن المهم ملاحظة أوضاع المستقيمات بنسبة بعضها للبعض و بالنسبة لمحورى الاحداثيات بالتأمل فى المعادلات المفروضة ولنلفت نظر الطالب الى ذلك نقول بعـد أن تحول صـ فى طرف بحيث يكون مكرره الواحد تؤول المعادلة الى احدى الصورتين الآتيتين صـ = م سـ أو صـ = م سـ + حـ

وكل من الكميتين م و حـ تكون موجبة أو سالبة صحيحة أو كسرية أو معدومة

فأولا ـ كل معادلة مثل صـ = م.سـ أى لا تشتمل الا على سـ و صـ تدل على خط مستقيم يمر بنقطة الاصل كما فى المثالين (١) و (٣) من نمرة ٣٥٠

ثانيـا ـ كل معادلة مثل صـ = سـ + حـ أى تشتمل على سـ وصـ وعلى كمية أخرى مثل حـ تدل على مستقيم لا يمر بنقطة الأصل ويقطع الاحداثى الصادى على بعد حـ من نقطة الأصل كما فى المثالين (٤) و (٥) من نمرة (٣٥١)

ثالثا ـ كل معادلتين مثل

صـ = م سـ ، صـ = م سـ + حـ

أو مثل صـ = م سـ + حـ ، صـ = م سـ + حـَ

أعنى أن مكرر سـ من الاولى هو عين مكرر سـ من الثانية يدلان على مستقيمين متوازيين كما يظهر من مقارنة الامثلة (٣) و (٤) و (٥) نمرة ٣٥١

رابعا ـ كل معادلتين مثل

صـ = م سـ + حـ ، صـ = − ١/م سـ + حَ

أى فيهما مكررا سـ مختلفان فى العلامة ومتعا كسان (حاصل ضربهما = − ١) يدلان على مستقيمين متعامدين كما يظهر من مقارنة المثال السادس بكل من الامثلة (٣) و (٤) و (٥)

تنبيـــه ـ اذا كان المستقيم منطبقا على أحد محورى الاحداث أو موازيا له فلا تكون معادلته محتوية الا على متغير واحد

فالمعادلة سـ = ٠ هى معادلة محور صـ والمعادلة صـ = ٠ هى معادلة محور سـ والمعادلة سـ = ب هى معادلة مستقيم مواز للمحور الصادى وعلى بعد منـه يسـاوى ب والمعادلة صـ = ا هى معادلة مستقيم مواز للمحور سـ وعلى بعد منه = ا

تمريـــن ٧٤

فى كل من الأمثـلة الآتيـة بين وضع الخط الذى تدل عليه كل معـادلة وقارن بين الخطوط الدالة عليها الثـلاث المعادلات وحقق ماتذكره برسم بيانى لكل ثلاث معادلات منها

(١) صـ = ٥سـ ، صـ = ٥سـ + ٣ ، صـ = ٥سـ − ٤

(٢) صـ = −٣سـ ، صـ = −٣سـ + ٣ ، صـ = −٣سـ − ٢

(٣) ص + س = ٠ ، ص + س = ٨ ، ص + ٤ = س

(٤) ٤س = ٣ص ، ٣ص = ٤س + ٦ ، ٤س + ٣ص = ٨.

(٥) س — ٥ = ٠ ، ص — ٦ = ٠ ، — ٥ ص = ٦ س

(٦) ٣س + ٤ص = ١٠ ، ٤س + ص = ٩ ، ٥س — ٢ص = ٨.

(٧) س + ص = ١٠ ، ص = س — ٤ ، ص = س + ٤

(٨) أوجد على محاور واحدة الرسم البيانى للمعادلات الآتية

س = ٥ ، س = ٩ ، ص = ٣ ، ص = ١١

وأوجد عدد الوحدات المربعة المحصورة بين هذه الخطوط

(٩) اجعل ١/٨ البوصة وحدة وأوجد مساحة الشكل الذى يبين بالرسم البيانى للمعادلات الآتية

س = ٧ ، س = — ٣ ، ص = — ٢ ، ص = ٨

(١٠) أوجد مساحة الشكل المحدد بالرسم البيانى للمعادلات

ص = س + ٦ ، ص = س — ٦ ، ص = — س — ٦

(١١) باعتبار المليمتر وحدة طولية أوجد مساحة الشكل المحدود بالمعادلات الآتية

ص = ٢س ، ص = ٢س — ٨ ، ص = — ٢س + ٨

٣٥٣ لما كانت كل معادلة تحتوى على كميتين مثل س ، ص من الدرجة الأولى يمكن أن توضع بالصورة ص = ا س أو ص = ا س + ب وسبق ايضاح أن كل معادلة ذات درجة أولى.

تربط بينها كميتان متغيرتان تدل على خط مستقيم كان كل كمية تأخذ الوضع ا سـ + ب يقال لها دالة مستقيم بالنسبة للحرف سـ والمعادلة التى مثل صـ = ا سـ + ب والتى مثل ا سـ + ب صـ + حـ = ٠ يقال لكل منها معادلة مستقيم

٣٥٤ اذا علم احداثيات عدة نقط من خط مستقيم أمكن تكوين معادلته بالطريقة الآتية

ليكن المطلوب إيجاد معادلة المستقيم المعلوم منه النقط (٣ , — ٤) و(٩ , ٤) و(١٢ , ١٨) فلذلك يقال

من المعلوم أن معادلة الخط تبين على وجه العموم بالوضع

صـ = ا سـ + ب

ومن حيث ان الخط المطلوب يمر بالنقطتين (٣ , — ٤) و(٩ , ٤) فان مقدارى احداثي كل نقطة منهما يكونان حلا للمعادلة فاذا وضع على التوالى ٣ و — ٤ ثم ٩,٥ بدلا عن سـ ٬ صـ فى المعادلة العمومية للخط

ينتج — ٤ = ٣ ا + ب

٤ = ٩ ا + ب

وبحل هذه المجموعة نجد ا = $\frac{٤}{٣}$ ٬ ب = — ٨

فاذا وضع هذان المقداران بدلا عن ا ٬ ب فى المعادلة العمومية آلت الى ٤ سـ — ٣ صـ = ٢٤

فهـذه معـادلة الخط المـار بالنقطتين الأولين وبمـا أن احداثيا النقطة الثالثة يصلحان أن يكونا حلا لهذه المعادلة اذ بجعل س = ١٢ ، ص = ٨ يتحقق تساوى الطرفين فالخط يمر بالنقطة الثالثـة وحينئذ فالمعادلة ٤ س — ٣ ص = ٢٤ هى معـادلة الخط المطلوبة

ويمكن ايضاح ذلك برسم خط يمر بالنقطتين الأوليتين رسما بيانيا ثم بيان أن النقطة الثالثة توجد عليه

ومن هنا يؤخذ أنه يكفى لتحقيق أن جمـلة نقط على خط مستقيم أن نستخرج معادلة الخط باعتبار احداثيات أى نقطتين من تلك النقط كما سـبق بيانه فان حققت المعادلة التى تنتج احداثيات النقط الباقية دل ذلك على أن جميع النقط على خط مستقيم واحد

حل مجموعة معادلتين آنيتين

٣٥٥ تقـدم بنمرة ١٢٥ أن كل معادلة ذات مجهولين يمكن تحقيقها بعـدة مقادير لأنه اذا أعطى لأحد المجهولين مقدار اختيارى ينتج للمجهول الثانى مقدار مطابق له ولذا قلنا انها غير معينة الحل

ويرى أن هـذا ينطبق على معادلة المستقيم لانه يمكن إيجاد جملة نقط تتعين بواسطة معادلة مستقيم

وتقـدم بنمرة ١٢٨ أنه اذا كان المفروض معادلتين آنيتين بمجهولين فلا يوجد لكل منهما الا مقدار واحد تتحقق به المعادلتان فى آن واحد

وهنا نقول ان كل مستقيمين متقاطعين لها نقطة مشتركة واحدة يكون مقدارا احداثيا هذه النقطة حلا للمجموعة ذات المعادلتين اللتين تدل كل منهما على خط مستقيم

(مثال ١) اذا أريد حل المعادلتين الاتيتين الآتيتين بطريق الرسم البيانى

٥ س + ٣ ص = ٢٩ ... ... (١)

٣ س — ٢ ص = ٦ ... ... (٢)

نعتبر أن كل معادلة منهما معادلة خط ونبحث عنه ولذا نفرض فى معادلة (١)

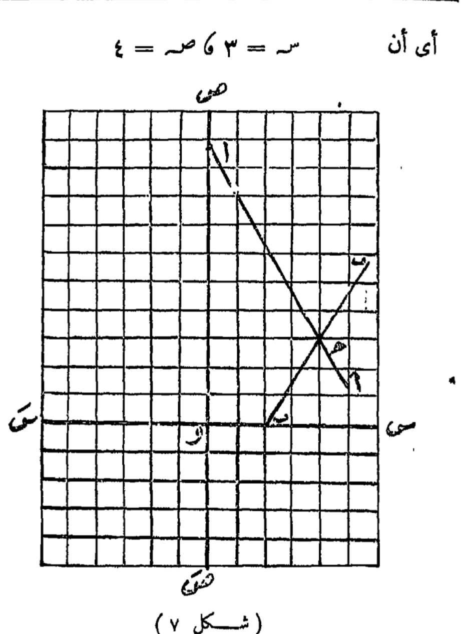
أن	س	=	٥	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
فيكون	ص	=	١ ١/٣	٣	٤ ٢/٣	٦ ١/٣	٨	-٩ ٢/٣	-١١ ١/٣	-١٣	-١٤ ٢/٣

ونفرض فى معادلة (٢)

أن	س	=	٥	٤	٣	٢	١	٠	-١	-٢	-٣
فيكون	ص	=	٤ ١/٢	٣	١ ١/٢	٠	-١ ١/٢	-٣	-٤ ١/٢	-٦	-٧ ١/٢

فاذا بين ذلك بالدقة يرى أن هاتين المعادلتين يبينان الخطين ا اَ ، ب بَ المرسومين فى الشكل الآتى ويكون مقدارا احداثيي نقطة تقاطعهما وهى نقطة (٣ و ٤) حلا للمجموعة

أى أن س = ٣ ، ص = ٤



(شكل ٧)

وهذا يؤيد الحل السابق بيانه بنمرة ١٣٠ وما بعدها بمراعاة قاعدة ١٢٨

٣٥٦ ينتج مما تقدم أن طريقة حل معادلتين آنيتين بمجهولين من الدرجة الأولى هو عبارة عن ايجاد احداثيي النقطة التى يتقاطع فيها الخطان المبينان لرسم هاتين المعادلتين رسما بيانيا

وبما أنه يكفى لتعيين مستقيم تعيين نقطتين من نقطه فيكفى فى حل مجموعة معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى بالرسم البيانى ايجاد نقطتين من كل مستقيم ومن المستحسن أن تنتخب النقطتان الواقعتان على المحاور

مثلا لحل المجموعة ٣ س + ص = ٩ ... ... (١)

س + ص = ٦ ... ... (٢)

نعتبر أن كل معادلة منهما معادلة خط ونبحث عنه ولذا نفرض فى معادلة (١)

أن	س	=	٠	١	٢	٣	٤	٥
فيكون	ص	=	٩	٦	٣	٠	—٣	—٦

ونفرض فى معادلة (٢)

أن	س	=	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
فيكون	ص	=	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠

ومن حيث ان النقطتين (٠,٩) ، (٣,٠) من المستقيم الأول توجدان على المحاور والنقطتان (٠,٦) ، (٦,٠) من المستقيم الثانى توجدان على المحاور أيضا فيكفى تعيين هذه النقط الاربع وبواسطتها يتعين المستقيان ونقطة تقاطعهما وهى ١ $\frac{١}{٢}$, ٤ $\frac{١}{٢}$ هى التى مقدارا احداثييها يحلان المجموعة أى أن س = ١ $\frac{١}{٢}$ ، ص = ٤ $\frac{١}{٢}$

٣٥٧ مناقشة تقدم بنمرة ١٤٢ أنه يشترط فى امكان حل مجموعة ذات معادلتين أو معـادلات أن لا يوجد بين معادلات المجمـوعة الواحدة تخالف فى مقادير المجاهيل ولا أن يكون بعض المعادلات متداخلا فى البعض

فأولا اذا أريد حل المجموعة س + ٣ ص = ٢ ... ... (١)

٣ س + ٩ ص = ٨ ... ... (٢)

يرى بدقة التأمل أن مقادير المجهولين فيهما ليست متحدة لأنه اذا قسم طرفا معادلة (٢) على ٣ ينتج س + ٣ ص = $\frac{٨}{٣}$ والطرف الأول من هذه المعادلة هو عين الطرف الأول من معادلة (١) وكان يجب أن يكون الطرف الثانى منهـا هو عين الطرف الثانى من الأولى (أى ٢) ولكنه هنا $\frac{٨}{٣}$ أى $٢\frac{٢}{٣}$

واذا حلت هاتان المعادلتان بطريق الرسم البيانى يظهر خطان متوازيان أى لا يوجد لهما نقطة تقاطع فهذا دليل على تخالف مقدارى س ، ص

ثانيا ــ اذا أريد حل المجموعة

٤ س + ٣ ص = ١ ... ... (١)

١٦ س + ١٢ ص = ٤ ... ... (٢)

يرى أنهما متداخلتان لأن الثـانية ناشئة من ضرب الأولى فى ٤ فكأنهما معادلة واحدة ومعلوم أن معادلة واحدة غير كافيـة فى تعيين مقدارى المجهولين اذ تكون لها حلول غير معينة

واذا حلت هذه المجموعة بواسطة الرسم البيانى ينتج خطان منطبق أحدهما على الآخر وبذلك يكون بينهما نقط مشتركة غير محدودة العدد وبما أن كل نقطة مشتركة يدل احداثياها على مقدارى المجهولين فيكون لها حلول غير معينة العدد

تمرين ٧٥

المطلوب حل كل من المجموعات الآتية بطريقة الرسم البيانى ثم تحقيق الناتج فى كل مجموعة بحلها بالطريقة العمومية نمرة ١٢٨

(١) س + ص = ٨
س − ص = ٢

(٢) ٢س + ص = ١٣
٣س − ص = ٧

(٣) ٣س − ٢ص = ١٧
٢س − ص = ١٢

(٤) ص = ٢س + ٣
ص + س = ٦

(٥) ص = ٣س + ٤
ص = س + ٨

(٦) ٤س − ص = ٠
٢س + ص = ١٨

(٧) ٢ س − ص = ٨
٤ س + ٣ص = ٦

(٨) ٣ س + ٢ ص = ١٦
٥ س − ٣ ص = ١٤

(٩) ٦ س − ٥ ص = ١٥
٤ س = ٣ ص

(١٠) ٢ س + ص = ٠
ص = ٤/٣ (س + ٥)

(١١) ٢ س − ص = ٣
٣ س − ٥ ص = ١٥

(١٢) ٢ ص = ٥ س + ١٥
٣ ص − ٤ س = ١٢

ملحقات

٣٥٨* اذا اشتملت متساويةعلى كميات منطقة (جذرية)وكميات غير منطقة (جذور صماء) كانت أجزاء المنطقة فى أحد الطرفين مساوية لأجزائها في الطرف الآخروكذا أجزاء غير المنطقة

ففى المتسـاوية $ح + \sqrt{ء} = هـ + \sqrt{و}$ اذا كان $ح$ ، $هـ$ منطقين و $\sqrt{ء}$ و $\sqrt{و}$ غير منطقين كان $ح = هـ$ ، $\sqrt{ء} = \sqrt{و}$

لأنه بتحويل $ح$ الى الطرف الثانى من المتساوية المفروضـة ينتج.

$$\sqrt{ء} = هـ + \sqrt{و} - ح$$

واذا فرض أن $هـ - ح = م$ ورفع الطرفان للدرجة الثانية ينتج

$$ء = م^{2} + و + ٢ م \sqrt{و}$$

أو

$$ء - م^{2} - و = ٢ م \sqrt{و}$$

ومن حيث ان الطرف الأول هو كميـة منطقة فلا يكون مساويا للكمية $٢ م \sqrt{و}$ غيرالمنطقة الا اذا كان $م = ٠$

ومن حيث ان $م = هـ - ح$

فيكون $هـ - ح = ٠$ أى $هـ = ح$

وحينئذ يمكن أن يسـتنتج من المتساوية المفروضة أن $\sqrt{ء} = \sqrt{و}$

* ملحقات بالجذور الصماء نمـرة ١٧٧

٣٥٩ كل مقدار بالصورة $\sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ يمكن تحويله الى مقدار مكافئ له بهذه الصورة $\sqrt{حـ + \sqrt{ء}}$ بحيث تكون الكميات ا ، ب ، حـ ، ء الداخلة فى هذين المقدارين كلها منطقة

وللوصول الى ذلك ترفع الكمية $\sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ الى الدرجة الثانية فينتج $(\sqrt{ا} + \sqrt{ب})^٢ = ا + ب + \sqrt{٤ اب}$

ثم نأخذ جذر الطرفين فينتج $\sqrt{ا} + \sqrt{ب} = \sqrt{ا + ب + \sqrt{٤ اب}}$

فاذا فرض أن ا + ب = حـ ، ٤ ا ب = ء
يكون $\sqrt{ا} + \sqrt{ب} = \sqrt{حـ + \sqrt{ء}}$ وهو المطلوب

تنبيه — يؤخذ مما تقدّم أن مقدار حـ هو مجموع المقدارين ا ، ب وأن مقدار ء هو أربعة أمثال حاصل ضربهما وأما علامة $\sqrt{ء}$ فتكون موجبة اذا كانت علامتا الجذرين متحدة وتكون سالبة اذا كانت علامتاهما مختلفة

(مثال ١) المطلوب تحويل $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ الى جذر واحد

يمكن أن نجرى عملا مشابها لما تقدّم ونحصل على المقدار المطلوب ويمكن استنتاج ذلك من القانون السابق

فنلاحظ أن حـ = ٣ + ٢ ، ء = ٤ × ٣ × ٢ = ٢٤

وحينئذ يكون $\sqrt{٣} + \sqrt{٢} = \sqrt{٥ + \sqrt{٢٤}}$

(مثال ٢) المطلوب تحويل $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ الى جذور واحد

نجعل فى القانون السابق

$$ح = ٣ + ٢ \text{ ، } د = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٢٤$$

ومن حيث ان الجـذرين المفروضين مختلفى العلامة فتكون علامة $\sqrt{٢٤}$ سالبة

ويكون $\sqrt{٣} - \sqrt{٢} = \sqrt{٥ - \sqrt{٢٤}}$

٣٦٠ بالعكس يمكن تحويل المقدار $\sqrt{ح + \sqrt{د}}$ الى آخر بهذه الصورة $\sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ بحيث تكون الكميات ا، ب، ح، د جذرية

وللوصول الى ذلك يقال

نفرض أن $\sqrt{ح + \sqrt{د}} = \sqrt{ا} + \sqrt{ب}$

ثم نربع الطرفين $ح + \sqrt{د} = ا + ب + ٢\sqrt{اب}$

وبمقتضى ماتقدّم بنمرة (٣٥٨)

يكون $ح = ا + ب \quad (١) \text{ ، } \sqrt{د} = ٢\sqrt{اب}$

أى $د = ٤ \, ا \, ب \quad (٢)$

فاذا ربع طرفا متساوية (١) وطرح من الناتج متساوية (٢)

ينتج $ح^{٢} - د = ا^{٢} + ب^{٢} - ٢ \, ا \, ب$

أو $ح^{٢} - د = (ا - ب)^{٢}$

نأخذ جذر الطرفين فينتج $\sqrt{ح^{٢} - د} = ا - ب \; ... \; (٣)$

ثم نكوّن مجموعة من متساويتى (١) ، (٣)

وبحلها ينتج $\text{ا} = \frac{1}{2}\text{ح} + \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ء}}$

، $\text{ب} = \frac{1}{2}\text{ح} - \frac{1}{2}\sqrt{\text{ح}^2 - \text{ء}}$

ومن حيث ان ا ، ب كميتان منطقتان فيـلزم أن يكون $\text{ح}^2 - \text{ء}$ مربعا كاملا فاذا رمز له بالرمز هـ^2

يكون $\text{ا} = \frac{\text{ح}+\text{هـ}}{2}$ ... ... (٤)

$\text{ب} = \frac{\text{ح}-\text{هـ}}{2}$ ... ... (٥)

أعنى أنه يلزم لامكان تحويل المقـدار $\sqrt{\text{ح} + \sqrt{\text{ء}}}$ الى جذرين منفردين أن يكون $\text{ح}^2 - \text{ء}$ مربعا كاملا.

تنبيه ـ قد فرض فى المساوية $\sqrt{\text{ح} + \sqrt{\text{ء}}} = \sqrt{\text{ا}} + \sqrt{\text{ب}}$ أن علامات الجـذور الأربعـة موجبة غير أنه قد تكون بعض هذه العلامات سالبة وللوصول الى معرفة علامتى ا ، ب بالنسبة الى علامتى المقدار $\sqrt{\text{ح} + \sqrt{\text{ء}}}$ يقال انه عند تربيع المتساوية السابقة

ينتج $\text{ح} + \sqrt{\text{ء}} = \text{ا} + \text{ب} + 2\sqrt{\text{اب}}$

وقد استنتج من هذه المتساوية أن $\sqrt{\text{ء}} = \sqrt{4\text{اب}}$ فاذن يلزم أن تكون علامتـا $\sqrt{\text{ء}}$ ، $\sqrt{4\text{اب}}$ متحدتين فاذا كانت علامة $\sqrt{\text{ء}}$ موجبة كانت علامة $\sqrt{4\text{اب}}$ موجبة أيضا وهـذا دليل على أن $\sqrt{\text{ا}}$

، $\sqrt{ب}$ متحدا العلامة واذا كانت علامة $\sqrt{ء}$ سالبة كانت علامة $\sqrt{٤ اب}$ سالبة وهذا دليل على أن $\sqrt{ا}$ ، $\sqrt{ب}$ مختلفا العلامة

(مثال ١) اذا أريد تحويل المقدار $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}}$ الى جذرين منفردين يقال اذا رمز للجذرين المطلوبين بالمقدارين $\sqrt{ا}$ ، $\sqrt{ب}$ فبناء على القانونين ٤،٥ السابقين

يكون $ا = \frac{ح + هـ}{٢}$ (٤) ، $ب = \frac{ح - هـ}{٢}$ (٥)

فأما ح فهو هنا عبارة ٧ وأما هـ فهو عبارة $\sqrt{ح^٢ - ء}$ أى $\sqrt{٤٩ - ٤٠} = \sqrt{٩}$ وهو مربع كامل جذره ٣

فيكون $ا = \frac{٧ + ٣}{٢} = ٥$ ، $ب = \frac{٧ - ٣}{٢} = ٢$

وحيث كانت علامة $\sqrt{٤٠}$ موجبة فتكون علامتا $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢}$ متحدتين وحينئذ يكون $\sqrt{٧ + \sqrt{٤٠}} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$

(مثال ٢) اذا أريد تحويل المقدار $\sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}}$ الى جذرين منفردين

فيلاحظ أن $ح^٢ = ٩$ ، $ء = ٨$ وأن هـ أى $\sqrt{ح^٢ - ء} = \sqrt{٩ - ٨} = ١$

فاذن يكون $ا = \frac{٣ + ١}{٢} = ٢$ ، $ب = \frac{٣ - ١}{٢} = ١$

ومن حيث أن علامة $- ٢ \sqrt{٢}$ سالبة فيعلم من ذلك أن علامتى ا ، ب مختلفتان

ويكون $\sqrt{٣-٢\sqrt{٢}} = \sqrt{٢} - \sqrt{١} = \sqrt{٢} - ١$

تمريــن ٧٦

حول كل واحد من المقادير الآتية الى مقدار مكافئ له تحت جذر عام

(١) $\sqrt{١١} + \sqrt{٣}$
(٢) $\sqrt{١١} - \sqrt{٣}$
(٣) $\sqrt{١٧} - \sqrt{١٣}$
(٤) $\sqrt{٥} + \sqrt{٧}$
(٥) $-\sqrt{٥} + \sqrt{١٧}$
(٦) $-\sqrt{٥} + \sqrt{٧}$

حول كل واحد من المقادير الآتية الى جذرين منفردين

(٧) $\sqrt{٨ + \sqrt{٦٠}}$
(٨) $\sqrt{٢٠ + \sqrt{٢٠٤}}$
(٩) $\sqrt{١٣ + \sqrt{٨٨}}$
(١٠) $\sqrt{١٥ + \sqrt{٢٢٤}}$
(١١) $\sqrt{١٨ - \sqrt{٢٦٠}}$
(١٢) $\sqrt{١١ - \sqrt{١٢٠}}$
(١٣) $\sqrt{١٣ - \sqrt{٨٨}}$
(١٤) $\sqrt{١٥ - ١٠\sqrt{٢}}$

اذا علم أن $\sqrt{٢} = ١,٤١٤٢١$ ، $\sqrt{٣} = ١,٧٣٢٠٥$ ، $\sqrt{٥} = ٢,٢٣٦٠٦$ ، $\sqrt{٧} = ٢,٦٤٥٧٥$ فما مقدار كل واحد من المقادير الآتية بدون اجراء عملية الجذر عليها

(١٥) $\sqrt{٥ + \sqrt{٢٤}}$
(١٦) $\sqrt{٩ + \sqrt{٥٦}}$
(١٧) $\sqrt{١٠ + \sqrt{٨٤}}$
(١٨) $\sqrt{١٠ - \sqrt{٨٤}}$
(١٩) $\sqrt{٨ - \sqrt{٦٠}}$
(٢٠) $\sqrt{١٢ - \sqrt{١٤٠}}$

٣٦١ * نذكر هنا أمثلة تحل بواسطة تعريف اللوغاريتم وخواصه العمومية السابق ايضاحها بنمرة ١٩٢ وما يليها

(مثال ١) أوجد لوغاريتم $\sqrt[٣]{٢٤٣}$ بالنسبة للاساس $\sqrt{٣}$

نرمز للوغاريتم المطلوب بحرف س فعلى حسب تعريف اللوغاريتم

يكون $\sqrt[٣]{٢٤٣} = (\sqrt{٣})^{س}$

أو $٢٤٣^{\frac{١}{٣}} = ٣^{\frac{س}{٢}}$

أو $(٣^{٥})^{\frac{١}{٣}} = ٣^{\frac{س}{٢}}$

أو $٣^{\frac{٥}{٣}} = ٣^{\frac{س}{٢}}$

ومن هذا ينتج أن $\frac{٥}{٣} = \frac{س}{٢}$

أى $س = \frac{١٠}{٣} = ٣\frac{١}{٣}$

(مثال ٢) أوجد لوغاريتم $\frac{١}{٢٧}$ بالنسبة للاساس ٨١

نرمز للوغاريتم المطلوب بحرف س فعلى حسب تعريف اللوغاريتم

يكون $\frac{١}{٢٧} = ٨١^{س}$

أو $\frac{١}{٣^{٣}} = ٣^{٤س}$

أو $٣^{-٣} = ٣^{٤س}$

ومنه $-٣ = ٤\,س$

أى $س = -\frac{٣}{٤}$

* ملحقات باللوغاريتمات نمرة ١٩٢

(مثال ٣) ما مقدار لوغاريتم ٠,٢٥٦ بعد العلم بأن لو ٢ = ٠,٣٠١٠٣

لو ٠,٢٥٦ = لو $\frac{٢٥٦}{١٠٠٠}$ = لو ٢٥٦ − لو ١٠٠٠ = لو $٢^{٨}$ − لو ١٠٠٠
= ٨ لو ٢ − لو ١٠٠٠ = ٨ × ٠,٣٠١٠٣ − ٣ = $\overline{٣}$,٢٤٠٨٢٤

(مثال ٤) ما مقدار لو ٠,٣٠٤$\dot{٨}$ بعد العلم بأن لو ٢ = ٠,٣٠١٠٣٠٠ ، لو ٣ = ٠,٤٧٧١٢١٣ ، لو ٧ = ٠,٨٤٥٠٩٨٠

معلوم أنه ٠,٣٠٤$\dot{٨}$ = $\frac{٢٧٤٤}{٩٠٠٠}$ = $\frac{٢^{٣} \times ٧^{٣}}{١٠٠٠ \times ٣^{٢}}$

فيكون لو ٠,٣٠٤$\dot{٨}$ = لو $\frac{٢^{٣} \times ٧^{٣}}{١٠٠٠ \times ٣^{٢}}$

أو = ٣ لو ٢ + ٣ لو ٧ − لو ١٠٠٠ − ٢ لو ٣

= ٣ (لو ٢ + لو ٧) − ٣ − ٢ لو ٣

= ٣(٠,٣٠١٠٣٠٠ + ٠,٨٤٥٠٩٨٠) − ٣ − ٢ لو ٠,٤٧٧١٢١٣

= ٣,٤٣٨٣٨٤٠ − ٣,٩٥٤٢٤٢٦

أو = $\overline{١}$,٤٨٤١٤١٤

(مثال ٥) المطلوب استخراج مقدار س من المعادلة الآتية مع العلم بأن لو ٢ = ٠,٣٠١٠٣

$$١٠^{٥-٣س} = ٢^{٧-٢س}$$

لذلك نأخذ لوغاريتم الطرفين فينتج

(٥ — ٣ سـ) لو ١٠ = (٧ — ٢ سـ) لو ٢ بحذف الاقواس.
ونلاحظ أن لو ١٠ = ١ فينتج

٥ — ٣ سـ = ٧ لو ٢ — ٢ سـ لو ٢ وبالتحويل والاختصار

ينتج ٥ — ٧ لو ٢ = (٣ — ٢ لو٢) سـ

فيكون سـ = $\frac{٥ - ٧ لو ٢}{٣ - ٢ لو ٢}$ نضع بدل لو ٢ مقداره

فينتج سـ = $\frac{٥ - ٧ \times ٠٫٣٠١٠٣}{٣ - ٢ \times ٠٫٣٠١٠٣}$

أو سـ = $\frac{٢٫٨٩٢٧٩}{٢٫٣٩٧٩٤}$.

أو سـ = ١٫٢٠٦ مقربا الى ٠٫٠٠١

(مثال ٦) ـ ما عدد أرقام المقدار $٢^{٦٤}$ بعد العلم بأن لو ٢ = ٠٫٣٠١٠٣

نفرض أن $٢^{٦٤}$ = سـ ثم نأخذ لوغاريتم الطرفين

فيكون لو سـ = ٦٤ لو ٢

أو لو سـ = ٦٤ × ٠٫٣٠١٠٣

أو لو سـ = ١٩٫٢٦٥٦٤

ومن حيث ان العدد البيانى من لوغاريتم سـ هو ١٩. فيستدل منه. على أن سـ يشتمل على ٢٠ رقما صحيحا أعنى أن عدد أرقام المقدار $٢^{٦٤}$ هو عشرون رقمـا .

تمرين ٧٧

(١) اذا كان أساس جملة لوغاريتمية هو √٥ فما مقدار لوغاريتم كل من ٣√٣ ، √٦٢٥ ، ٠٠٠٣٢و٠

(٢) مامقدار لوغاريتم كل من ١٠ ، ٠٠١و٠ اذا كان أساس الجملة اللوغاريتمية ١و٠

(٣) أوجد قيمة كل من $لو_{٩}$ ٧٢٩ ، $لو_{٤}$ ١٢٥و٠

(٤) » » $لو_{١٦}$ $\frac{١}{٨}$ و $لو_{١١}$ ١٢١

المطلوب إيجاد الأعداد التى لوغاريتماتها المقادير الآتيــة اذا كان الأساس لكل منها العدد المقابل له

(٥) اللوغاريتم $\frac{١}{٢}$ والأساس ٣٦ ، اللوغاريتم — ٢ والاساس ٥

(٦) » —٣ » ٠٥و٠ ، » ٣ » ١

(٧) » —١ » —٣ ، » ٢ » ١٣و٠

(٨) » —$\frac{٣}{٢}$ » ١٠٠ ، » —٣ » ٠٢و٠

اذا علم أن لو٢ = ٣٠١٠٣و٠ و لو٣ = ٤٧٧١٢١٣و٠ و لو ٧ = ٨٤٥٠٩٨٠و٠ فأوجد قيمة كل من المقادير الآتية

(٩) لو ٥١٢ ، لو ٢٤٣	(١٢) لو ٨٨٨و٣
(١٠) لو ١٠٢٩ ، لو ١٤٤	(١٣) لو ٨٦̇و١
(١١) لو ١٢٦ ، لو ٦٤	(١٤) لو ∛٧٥٦

(١٥) لو $\frac{١١}{١٣}$ + لو $\frac{٥٠}{١٤٣}$ + لو $(٢\frac{٣}{٥})^{٢}$ بعد الاختصار

(١٦) لو $\frac{٧٥}{١١٢}$ + لو $(\frac{٢٠}{٦٣})^{-٢}$ + لو $(١\frac{١}{٣})^{٤}$ « «

(١٧) لو $\left(\sqrt{١٠,٨} \times \sqrt[٣]{٥,٢٤} : \sqrt{٩٠^{-٤}}\right)$ « «

(١٨) لو $\left[\left(١٠٨^{\frac{١}{٢}} \times ١٢٦^{\frac{١}{٣}}\right) : \left(١٠٠٨^{\frac{١}{٦}} \times ١٦٢^{\frac{١}{٣}}\right) \right]$
بعد الاختصار

(١٩) أوجد عدد الأرقام فى تحليـــل المقدار $١٤^{١٥}$

(٢٠) أوجد عدد الأصفار التى بين الشرطة وأول رقم معنوى فى تحليل المقدار $(\frac{٢}{٣})^{١٠}$

أوجد مقدار المجهول فى كل من المعادلات الآتية

(٢١) $٦^{٧-س} \times ٢^{٦-س} = ٧٢$

(٢٢) $١٨^{٥-س} : ٣^{٤-س} = ١٠٨$

(٢٣) $\frac{٦}{١٦^{س}} = ٨١^{س}$

(٢٤) $٥^{س-٣} = ٨$

(٢٥) $١٢^{٣س-٤} \times ١٨^{٧-٢س} = ١٤٥٨$

أوجد قيمة المقادير الآتيــة بواســطة اللوغاريتمات مع اســتعمال الجداول

(٢٦) $٢٦,٤٢ \times ٦,٧٥$ ، $٤٥٦٥ \times ٥,٦٤٢$

(٢٧) $٠,٦٤٥٦ \times ٠,٠٥٤٥٧ \times ٠,٠٠٤٥٢٣$

(٢٨) $\frac{٦٥٤}{١٢٢٨}$ ، $\frac{٦٥٤١ \times ٢}{٨٩٣٦ \times ٠,٤٥}$

(٢٩) $٦٨^{٨} \times ٢^{٣}$ ، $٦٧٤٥^{٧}$

(٣٠) $١,٠٥^{١٠}$ ، $٠,٦٤٠١^{٧}$

(٣١) $\left(\frac{١}{٣}\right)^{٥}$ ، $\left(\frac{٢}{٩}\right)^{٧}$

(٣٢) $\sqrt[٣]{\frac{٢٣}{٧٥٥٨٦}}$ و $\sqrt[٤]{\frac{١٫٢٨}{٩٦٥٧}}$

(٣٣) $\sqrt[٧]{٥}$ ، $\sqrt[١٥]{٦٧٣٢ \times ٠,٤٢}$

(٣٤) $\frac{\sqrt[٣]{٨٤٩٦}}{\sqrt[٥]{٦٧٠٨}}$ ، $\frac{\sqrt[٨]{٥٦٧٨}}{\sqrt{٠,٠٠٥٦١}}$

(٣٥) $\frac{٤\sqrt[٣]{٥٧٣,٩} - ٣\sqrt[٥]{٦٧٨,٩}}{٤٥\sqrt{٦٣٤٥٦} - ٣\sqrt[٣]{٦,٧٨٩}}$

المطلوب حل المجموعات الآتية

(٣٦) لو س + لو ص = ٢
س − ص = ١٥

(٣٧) لو س + لو ص = ١,٣٨٠٢١
٥ س − ٣ ص = ١٨

(٣٨) ٢ لو س − لو ص = ٠,٧٢٧٠٠
لو س + ٢ لو ص = ١,٥٥٦٣٠

(٣٩) لو س + لو ص = ٣
٥ $س^{٢}$ − ٣ $ص^{٢}$ = ٦١٢٥

(٤٠) لو س + لو ص = ٢
$س^{٢}$ + $ص^{٢}$ = ٦٤١

بحمد الله وعنايته وحسن توفيقه ورعايته تمت الطبعة الثانية لكتاب القواعد الجلية فى الأعمال الجبرية وقد تعهدناه بما تقتضيه معاودة النظر من التهذيب والاصلاح فسددنا مابه من ثغور النقص وأصلحنا مافيه من الخطأ فجاء جامعا بين برنامجى المعاهد الدينية العلمية الاسلامية والمدارس الثانوية المصرية مشتملا على تمارين عديدة تدريجة ومسائل متنوعة تطبيقية هى غاية هذا العلم المقصود وضالته المنشود

وأرجو من يعثر فيه على زلة من الأصل أو هفوة من الطبع أن يصلحها بفكره الثاقب ويحررها برأيه الصائب نسأل الله العظيم أن يوفقنا الى مافيه المنفعة العامة وأن يجعله خالصا لوجهه الكريم وينفع به النفع العميم والصلاة والسلام على سيدنا محمد وآله مسك الختام ؟

تحريرا فى ٢٠ رجب سنة ١٣٣٠

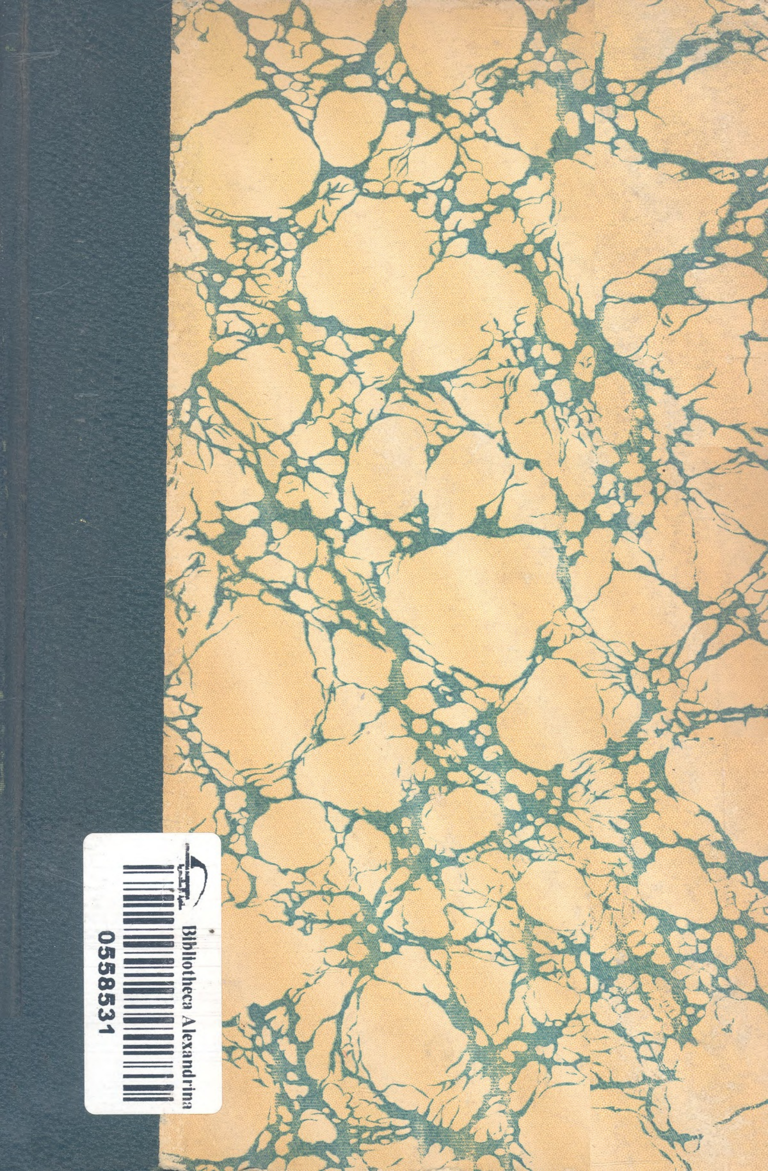
محمد ادريس

ملحوظه — بعد كل مبحث من هذه المباحث توجد تمارين متعددة عليه

صحيفة	سطر	الخطأ	الصواب	صحيفة	سطر	الخطأ	الصواب
١٧	٤	$(\frac{ب}{و} - ح)$ و	$(\frac{ب}{و\,ا} - ح)$ و	٩١	١٢	+ ص	+ $ص^{٢}$
٣٢	٣	ح $\sqrt{\overline{١ -}}$	حَ $\sqrt{\overline{١ -}}$	١٠٥	٢	هـ للاول	ى للاول
٣٧	١٠	$\frac{ح}{ى}$	$\frac{هـ}{س}$	١٠٦	١٩	$\frac{ب}{ا}$	$\frac{ا}{ب}$
٤٦	١٩	س = ٥ و س	سَ = ٥ و سً	١١١	٨	$\frac{ع}{ط}$	$\frac{ح}{ط}$
٥٠	١٣	خمسه	خمسيه	١٢١	١٨	$\frac{ن}{٢}$	$\frac{ن}{٢}$
٥١	١٣	عامل	عاملين	١٢٤	١٦	١٣٩ س	٣٩ س
٥٢	١١	بحرف	بحرفى	١٥٨	١٦	التوافق	التوافيق
٥٥	١٥	س	$س^{٢}$	١٥٨	١٧	حرف	لا حرف
٥٨	١٢	$\sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - هـ}$	$\sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - هـ}$	١٦٠	١٨	هذم	هذه
٥٨	١٢	$-\sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - هـ}$	$-\sqrt{\frac{ى^{٢}}{٤} - هـ}$	١٦٠	٢٠	ماعدا	ماعدد
٦٠	٧	ح س	ح $س^{٢}$	١٦٠	٢٢	جريد	جريده
٦٠	١٠	− ٢ ى	− ٢ ىَ	١٦١	١	ماعدا	ماعدد
٦٢	١٩	٣ ٤	٣٨٤	١٦١	٧	ماعدا	ماعدد
٧٢	١	س	سً	١٦١	١٣	قارب واحد	قارب منهم واحد
٨٩	٢٠	س	$س^{٢}$	١٦٨	١٢	فددرجات	فدرجات

صحيفة	سطر	الخطأ	الصواب	صحيفة	سطر	الخطأ	الصواب
١٧٣	١٩	$(\text{س} +)^{٦}$	$(\text{س} + ٣)^{٦}$	١٨٧	١٣	الجملة ويضاف	الجملة فى الاشهر ويضاف
١٧٤	٢	$(\text{ا} + \frac{٣}{\text{ب}})^{٧}$	$(\text{ا} - \frac{٣}{\text{ب}})^{٧}$	١٩٠	١١	١٦١ جنيها	٥٦١ جنيها
١٧٤	١٠	$(\text{ا} - \text{س})^{١٢}$	$(١ - \text{س})^{١٢}$	١٩٠	١٣	حسب المدة	احسب المدة
١٧٤	١١	$(٣\text{س} - \frac{١}{٢})^{٩}$	$(٣\text{س} + \frac{١}{٢})^{٩}$	١٩١	٢١	النسبنة	النسبة
١٧٨	١٩	فى حد	فى كل حد	١٩٢	٢	تعددها	تعدادها
١٨١	٤	$٢\text{س} + ١$	$٢\text{س} - ١$	١٩٢	٤	ولو١٣,١١٣٠٥	ولو ١٣,١١٣٥٠

(م٠م/١٣٠/١٩١١/٥٠٠٠)


Bibliotheca Alexandrina
0558531